

Referate.

Geometrie.

● **Sanden, Horst von:** *Darstellende Geometrie.* (Teubners math. Leitfäden. Bd. 2.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. VIII, 111 S. u. 114 Abb. geb. RM. 6.40.

Elementare Einführung in die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie unter Bevorzugung einer möglichst technischen Terminologie. *Neugebauer* (Göttingen).

Scherrer, F. R.: *Die Wurfbewegung im leeren Raum, synthetisch behandelt.* Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **76**, 61—101 (1931).

Mit der vorliegenden Abhandlung wird beabsichtigt, die Vorzüge der synthetischen Methode bei der Beantwortung der mit dem genannten Problem zusammenhängenden Fragen zu beleuchten. *Autoreferat.*

Maroni, Arturo: *Sulle coppie di serie lineari, appartenenti ad una curva algebrica, contenute parzialmente l'una nell'altra, senza residuo fisso.* Rend. Semin. mat. Univ. Padova **2**, 49—60 (1931).

L'auteur part de l'observation de Severi, qu'une série linéaire g_n^r peut être contenue partiellement dans une autre „sans résidu fixe“, c'est à dire sans être résiduelle d'un groupe de points fixes par rapport à cette autre série. Il montre sans difficulté qu'une série linéaire donnée g_n^r est toujours contenue partiellement dans une infinité d'autres. Puis il étudie le cas où il existe une série g_N^r de même dimension r que la série donnée g_n^r , la contenant partiellement sans résidu fixe. Si r est égal à un, l'existence de ces deux séries n'entraîne aucune propriété. Si au contraire r est supérieur à un, la courbe algébrique considérée ne peut avoir un genre p arbitraire, que si g_N^r et g_n^r sont l'une et l'autre composées avec une même involution, qui est alors rationnelle. Si g_N^r n'est pas composée, la courbe est unicursale ($p = 0$); si g_N^r est composée avec une involution γ_m^1 avec laquelle g_n^r n'est pas composée, la courbe est unicursale ou elliptique ($p = 0$ ou 1). Si $p = 1$, l'involution γ_m^1 est elle-même elliptique, et l'on a $N = mn$. Les démonstrations et les exemples ne font intervenir que les propriétés classiques des séries linéaires.

P. Dubreil (Göttingen).

Mukhopadhyaya, S.: *Extended minimum-number theorems of cyclic and sextactic points on a plane convex oval.* Math. Z. **33**, 648—662 (1931).

Es handelt sich um den Vierecksatz und seine Verallgemeinerungen, insbesondere für den Fall, daß — kurz gesagt — an Stelle der oskulierenden Kreise (Krümmungskreise) oskulierende Kegelschnitte treten, an Stelle der Scheitel also „sextaktische Punkte“. Verf. hatte diese Sätze bereits früher veröffentlicht (Bulletin of the Calcutta mathematical society, Vol. I [1909]). Nunmehr gibt er neue, ins einzelne ausgeführte Beweise. Die fraglichen Sätze lauten: 1. Hat ein (ebenes, stetig differenzierbares) Oval V mit einem Kreise $2n$ Schnittpunkte gemeinsam ($n \geq 2$), dann besitzt V mindestens $2n$ Scheitel; die Mindestanzahl der Scheitel eines solchen Ovals ist daher vier. Nennt man einen Scheitel „positiv“ bzw. „negativ“, je nachdem der zugehörige Krümmungskreis das Oval von innen bzw. von außen berührt, so folgen beim Durchlaufen von V die im Satze genannten Scheitel immer mit abwechselndem Vorzeichen aufeinander. — Vorausgesetzt ist, daß der durch irgend drei Punkte von V bestimmte Kreis stetig mit diesen Punkten variiert, eingeschlossen den Fall, daß die drei Punkte zusammenrücken. „Scheitel“ heißt jeder Punkt von V , in dessen beliebiger kleiner Umgebung (auf V) vier (verschiedene) Punkte von V existieren, welche auf einem Kreise liegen; daher auch die, vom Verf. gebrauchte, Bezeichnung: „zyklischer

Punkt“. 2. Hat ein Oval V mit einem Kegelschnitt $2n$ Schnittpunkte gemeinsam ($n \geq 3$), so existieren auf V mindestens $2n$ sextaktische Punkte, welche auf V mit abwechselndem Vorzeichen aufeinanderfolgen; insbesondere ist also die Mindestanzahl sextaktischer Punkte auf V gleich sechs. — Vorausgesetzt ist (entsprechend wie im Falle des Kreises) die Stetigkeit eines Kegelschnittes K , welcher durch fünf Punkte auf V bestimmt ist, in Abhängigkeit von diesen fünf Punkten. Ein Punkt auf V heißt „sextaktisch“, wenn in beliebig kleiner Umgebung von ihm auf V sechs Punkte existieren, welche auf einem Kegelschnitt liegen. Die eben angeführten Sätze erscheinen als Spezialfälle ganz allgemeiner Sätze bzw. als spezielle Anwendungen sehr allgemeiner Überlegungen von — um es kurz auszudrücken — topologischem Charakter. Der leitende Gedanke ist dabei im letzten Grund der, daß sich z. B. vier Schnittpunkte eines Kreises mit V durch passende Variationen von dreien unter ihnen auf einen Punkt P zusammenziehen lassen, wobei alsdann P ein Scheitel ist. Und zwar kann dieses Zusammenziehen auf (mindestens) vier verschiedene Arten erfolgen. Die hiermit angedeutete Kontinuitätsbetrachtung wird freilich vom Verf. in der vorliegenden Beweisanordnung auf sehr interessante Weise völlig vermieden. Wegen der weiteren Einzelheiten des Beweises muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Haupt (Erlangen).

Sample, J. G.: On surfaces of intersection of cubic primals, and cubic Cremona transformations of four-dimensional space. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 369—400 (1931).

Zwei Hyperflächen dritten Grades, in einem vierdimensionalen Raume S_4 , welche eine (irreduzible oder zerfallende) Fläche F^r der Ordnung r gemein haben, schneiden sich weiter in einer Fläche F^{9-r} der Ordnung $9-r$. Der Verf. setzt $r \leq 4$ voraus, und untersucht die Flächen F^{9-r} , die den verschiedenen Werten $r = 4, 3, 2, 1$ und den verschiedenen Arten des Zerfallens von F^r entsprechen. Einige von diesen Flächen sind bekannt oder in ihren wichtigsten Eigenschaften leicht zu erkennen; einige andere, wie die F^7 (oder die F^8), die zu einer Fläche zweiten Grades (oder zu einer Ebene) residual sind, sind nicht rational und werden nicht untersucht. Es werden auch die Mannigfaltigkeiten betrachtet, die auf S_4 mit dem System aller Hyperflächen dritten Grades durch F^r oder F^{9-r} abgebildet werden. Im Falle, wo F^r eine rationale Fläche ist, ist es leicht, alle homaloidischen ∞^4 -Systeme von Hyperflächen dritten Grades, die F^{9-r} enthalten, zu konstruieren. Ein solches System schneidet in der Tat auf F^r ein homaloidisches Kurvennetz aus, so daß die Bestimmung der gewünschten Systeme auf die Bestimmung solcher Kurvennetze zurückgeführt wird, die in einem gegebenen linearen Kurvensystem enthalten sind: in demjenigen System nämlich, das auf F^r von allen Hyperflächen dritten Grades durch F^{9-r} ausgeschnitten wird. Die Bestimmung wird dann in der Bildebene von F^r ausgeführt. Ganz ähnlich findet man die homaloidischen ∞^4 -Systeme von Hyperflächen dritten Grades durch F^r . Die zu untersuchenden Fälle sind sehr zahlreich; und nur die einfachsten werden vollständig erledigt.

E. G. Togliatti (Genova).

Palozzi, G.: Una proprietà caratteristica delle tangenti di Darboux. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 485—488 (1931).

Durch einen festen Punkt O einer Fläche σ ziehe man eine willkürliche Kurve C ; in jedem Punkte von C ziehe man die beiden asymptotischen Tangenten an σ ; so bekommt man zwei Regelflächen, die in O eine gemeinsame oskulierende F_2 haben; die F_2 sei mit $Q(C)$ bezeichnet. Dann und nur dann, wenn C in O eine Darbouxtangente von σ berührt, hat C in O eine Berührung dritter Ordnung mit $Q(C)$. Dies Ergebnis wird einerseits mit einer vom Ref. herrührenden (irrtümlicherweise Hn. Fubini zugeschriebenen) Charakterisierung der Darbouxkurven verglichen, andererseits in der folgenden Form erneut bewiesen: Die Schnittkurve Γ von σ und $Q(C)$ hat in O einen dreifachen Punkt; dann und nur dann berührt C eine Tangente t in O an Γ , wenn t eine Darbouxtangente ist.

Čech (Brno).

Mentré, P.: Sur les formes différentielles d'un complexe de droites. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 583—587 (1931).

Sei $p = p(u_1, u_2, u_3)$ die Erzeugende eines Linienkomplexes; sei π ein willkürlicher unter den ∞^1 berührenden linearen Komplexen, so daß $\pi' = \pi + \alpha p$ (α ein Parameter) der allgemeine berührende lineare Komplex ist. Der Faktor von π sei so gewählt, daß $S\pi^2 = 1$. Sei

$$\varphi = Sdp^2, \quad \chi' = Sdpd\pi' = \chi + \alpha\varphi, \quad \Phi' = Sd\pi'^2 = \Phi + 2\alpha\chi + \alpha^2\varphi.$$

Die charakteristische lineare Kongruenz des Komplexes π' ist speziell für die Bewegungen dp mit $\Phi' = 0$. Wenn man du_1, du_2, du_3 als homogene Koordinaten in einer Hilfsebene γ deutet, so lautet das Hauptergebnis der Arbeit: Der Kegelschnitt $\Phi' = 0$ ist polar zum Kegelschnitt $\varphi = 0$ in bezug auf den Kegelschnitt $\chi' = 0$. Dieses Ergebnis wird geometrisch interpretiert. Die Einhüllende ψ der Kegelschnittschar Φ' (α variabel) wird untersucht: es ist die zu $\varphi = 0$ inverse Kurve der Ebene γ in bezug auf das Kegelschnittbüschel χ, φ ; ihre Gleichung ist $\psi = \chi^2 - \varphi\Phi = 0$.

Čech (Brno).

Corbellini, Giuseppe: Dell'associabilità di m congruenze di curve nello spazio ad n dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 655—661 (1931).

Es werden Bedingungen dafür angegeben, daß in einem n -dimensionalen Raume durch m ($2 \leq m < n$) Kurvenkongruenzen ∞^{n-m} m -dimensionale Flächen hindurchgelegt werden können. Es wird auf den Tensorcharakter der linken Seiten der Bedingungsgleichungen hingewiesen; sonst enthält die Note wohl kaum etwas sachlich Neues.

E. Čech (Brno).

Lane, Ernest P.: Conjugate nets and the lines of curvature. Amer. J. Math. 53, 573—588 (1931).

Le mémoire référé consiste de deux parties dont la première est consacrée à la théorie projective de la surface rapportée à un réseau conjugué et la seconde donne l'application de la théorie précédante à la géométrie métrique des lignes de courbure. L'auteur base l'étude projectif de la surface comme M. Slotnik (vgl. dies. Zbl. 1, 32) sur le système complètement intégrable des équations

$$x_{uu} = px + \alpha x_u + Ly,$$

$$x_{uv} = cx + ax_u + bx_v,$$

$$x_{vv} = qx + \delta x_v + Ny,$$

dont l'intégrale générale détermine les coordonnées homogènes courantes de la surface en jeu et les quatre quantités y donnent le point P_y qui divise avec le point P_x harmoniquement les deux foyers de l'axe du réseau coordonné. L'axe est la droite, d'intersection des deux plans osculateurs des lignes du réseau. En y ajoutant deux points P_ρ et P_σ (les deux transformés de Laplace du point P_x), l'auteur introduit les coordonnées projectives locales par rapport au tétraèdre $(P_x P_\rho P_\sigma P_y)$ et donne les équations de diverses coniques, cubiques, quadriques etc. liées au point P_x et considérées dans la théorie projective-différentielle de la surface. Comme une contribution nouvelle il construit la notion des deux quadriques conjuguées osculatrices au point P_x d'une courbe C par rapport au réseau N . C'est les quadriques limites qui passent par les tangents aux lignes de l'une ou de l'autre familles du réseau N tracées dans les trois points consécutifs infiniment voisins de la ligne C . L'auteur examine le cône qui projette du point P_x la ligne d'intersection de ces quadriques, ainsi que leurs lignes d'intersection avec le plan tangent de la surface. Pour donner un exemple citons le théorème: les deux quadriques conjuguées osculatrices à chaque point de chaque courbe du réseau N' coupent le plan tangent suivant les tangents aux lignes du réseau N si les tangents des deux réseaux se divisent harmoniquement. Dans la seconde partie l'auteur emploie les coordonnées locales par rapport au trièdre formé des tangents aux lignes de courbure et de la normale de la surface. Les formules de transformations des coordonnées projectives locales de la première partie en coordonnées métriques locales

de la seconde qu'il établit lui permettent de formuler pour les lignes de courbure plusieurs propriétés projectives d'un réseau conjugué en termes de la théorie métrique de la surface.

S. Finikoff (Moskau).

Mira Fernandes, A. de: Direzioni concorrenti. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 587—590 (1931).

Wird einem jeden Punkt M einer (anisotropen) Kurve L auf einer Riemannschen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_n ein (kontravarianter) Vektor ξ^i mit (längs L variablen) Anfangs- und Endpunkt M bzw. M' derart zugeordnet, daß die Tangente in M' an die Kurve L' (Ort aller M') jeweils senkrecht auf die zu M gehörige Tangentialhyperebene E_n steht, so ist die so erklärte Übertragung der Vektoren ξ^i ein „trasporto concorrente“ („Treffübertragung“). Diese Begriffsbildung verdankt man A. Myller, welcher die Differentialgleichungen dieser Übertragung auf die Form:

$$\frac{d\xi^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} \xi^h \frac{dx^k}{ds} = - \frac{dx^i}{ds} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

gebracht hat. Aus Myllers Übertragungsformeln gewinnt Verf. weitere Eigenschaften des „trasporto concorrente“: a) Die kovariante Ableitung des übertragenen Vektors ist ein Einheitsvektor. b) Die kovariante Ableitung ist Tangente längs des Weges L der Übertragung mit entgegengesetzter Orientierung. Weitere Beziehungen bestehen zwischen dem Betrag ξ des Vektors ξ^i selbst und der seiner Richtung zugeordneten Krümmung $1/R$. Für eine geodätische Wegkurve L wird das Differential der Projektion von ξ auf die Kurventangente entgegengesetzt gleich dem Bogendifferential. Alle diese Eigenschaften ergeben sich durch einfache Rechnung unter Verwendung des metrischen Fundamentaltensors ($ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$) der V_n .

M. Pinl (Berlin).

Bortolotti, Enea: Differential invariants of direction and point displacements. Ann. of Math., II. s. 32, 361—377 (1931).

Die Darstellung einer linearen Richtungsübertragung durch eine bekannte lineare Vektorübertragung Γ_{jk}^i hat bereits Eisenhart gegeben. Verf. beweist die Umkehrung dieser Ergebnisse: Sind die Eisenhartschen Gleichungen erfüllt, so ist durch sie immer eine Richtungsübertragung bestimmt, wobei nur algebraische Verträglichkeit bezüglich der Differentiale $d\xi^i$ des Systems vorausgesetzt wird. Die Theorie der Bahnkurven (verallgemeinerte geodätische Linien) linearer Richtungsübertragungen beschreibt Verf. durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Anschluß an die Untersuchungen von O. Veblen und I. M. Thomas. Der „normierte“

affine Zusammenhang $P_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \frac{2}{n-1} \delta_j^i \Phi_k$ ermöglicht die Aufstellung des Theorems:

die Differentialinvarianten einer linearen Richtungsübertragung sind die Differentialinvarianten des zugehörigen normierten affinen Zusammenhangs P_{jk}^i . Auch die Theorie nichtlinearer Richtungsübertragungen läßt sich auf eindeutig in charakteristischer Weise zugeordnete ausgezeichnete nichtlineare Vektorübertragungen aufbauen; ihre Entwicklung verläuft völlig analog zum linearen Fall, wobei auch der „Alinearitätstensor“ der nichtlinearen Vektorübertragungen $F_{jk}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i(x, \xi)}{\partial \xi^i}$, dessen identisches

Verschwinden den linearen Fall kennzeichnet, sein Gegenstück findet. Legt man Veblens Definition projektiver Tensoren zugrunde und verwendet Cartans Deutung affiner (kontravarianter) Vektorkomponenten als projektive Punktkoordinaten im zugehörigen Tangentialraum, so vermittelt der so gewonnene Parallelismus zwischen projektivem und affinem Zusammenhang (gewonnen durch eine Zusatzdimension) die vollständige Durchführung der Invariantentheorie dieser linearen oder nichtlinearen „Punktübertragungen“.

M. Pinl (Berlin).

Tucker, A. W.: On generalised covariant differentiation. Ann. of Math., II. s. 32, 451—460 (1931).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Tensorbegriffs und der kovarianten Differentiation über das von W. Mayer eingeführte „verallgemeinerte Ricci-differen-

tial“ (vgl. Duschek-Mayer, Differentialgeometrie II, Kap. 7) hinaus. Im Transformationsgesetz

$$T_{h_1 \dots h_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{h_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{h_p}} = \bar{T}_{k_1 \dots k_q}^{j_1 \dots j_p} \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{j_p}}{\partial x^{k_p}}$$

wird nicht mehr angenommen, daß alle Indizes dieselben Werte, etwa $1, \dots, N$ annehmen, sondern diese Zahlen werden in ω Gruppen

$$1, \dots, m_1 | m_1 + 1, \dots, m_2 | \dots | m_{\omega-1} + 1, \dots, m_{\omega} = N$$

eingeteilt, derart, daß jeder (dann entsprechend zu kennzeichnende) Index nur die Werte einer solchen Gruppe annimmt. Ist z. B. $\omega = 2$, $m_2 - m_1 = n > m_1 = m$, $x^{m+1} = y^1, \dots, x^{m+n} = y^n$ und sind die y^i ($i = 1, \dots, n$) Funktionen der x^α ($\alpha = 1, \dots, m$), so liegt eine m -dimensionale Fläche V_m des R_n vor und $T_{h_1 \dots h_q}^{i_1 \dots i_p}$ ist ein Tensor mit Flächen- und Raumindizes (z. B. $\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = T_\alpha^i$), wie sie von Mayer betrachtet wurden. Für derartige allgemeine Tensoren wird in naheliegender Weise eine absolute Differentiation angegeben und ihre Kraft an einigen Beispielen gezeigt.

A. Duschek (Wien).

Villa, M.: *Sulle singolarità della Jacobiana di $r + 1$ ipersuperficie dello spazio ad r dimensioni*. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 574–576 (1931).

Eine vorläufige Mitteilung über den wesentlichen Inhalt einer noch nicht erschienenen größeren Publikation des Verf., in der notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß die Jacobische Hyperfläche eines Systems von $r + 1$ Hyperflächen F_i eines S_r in einem allgemeinen Punkt eine um eine bestimmte Zahl größere Vielfachheit hat als im allgemeinen Fall.

A. Duschek (Wien).

Gronwall, T. H.: *A functional equation in differential geometry*. (Dep. of Phys., Columbia Univ., New York.) Ann. of Math., II. s. 32, 313–326 (1931).

Verf. beantwortet die folgende Frage: Welche Flächen konstanter Krümmung K lassen sich durch Gleichungen der Form $X(x) + Y(y) + Z(z) = 0$ darstellen, wo x, y, z rechtwinklige Koordinaten des Raumes sind? Zu diesen Flächen gehören offenbar alle Rotationsflächen konstanter Krümmung, deren Rotationsachse eine der Koordinatenachsen ist. Denn eine Rotationsfläche, deren Achse z. B. die z -Achse ist, läßt sich durch $x^2 + y^2 + Z(z) = 0$ darstellen. Werden die Umkehrfunktionen von $u = X(x)$, $v = Y(y)$, $w = Z(z)$ in der Form $x = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$, $y = \int \frac{dv}{\sqrt{g(v)}}$, $z = \int \frac{dw}{\sqrt{h(w)}}$ angesetzt, so führt die genannte Frage auf die Aufgabe, alle Funktionen f, g, h zu bestimmen, die der Funktionalgleichung

$$f(u) g'(v) h'(w) + g(v) h'(w) f'(u) + h(w) f'(u) g'(v) - K [f(u) + g(v) + h(w)]^2 = 0 \quad (1)$$

mit der Nebenbedingung $u + v + w = 0$ genügen. f, g, h werden 3mal differenzierbar angenommen. Dann läßt sich aus (1) schließen, daß sie analytisch sein müssen. Mit funktionentheoretischen Methoden (Untersuchung der Singularitäten, der Nullstellen und des Anwachsens des absoluten Betrages der Funktionen) wird gezeigt, daß die Funktionalgleichung (1) nur solche Lösungen besitzt, die zu den genannten Rotationsflächen gehören.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Boggio, T.: *Sull'operatore di Laplace e sulle equazioni dell'elasticità negli spazi curvi*. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 412–416 (1931).

A generalization to curved space of the formula of elementary vector analysis $\Delta_2 \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}$ is obtained by methods already explained by the author [Rendiconti dei Lincei, VI. s. 7, 811–817 (1928)] and applications are made to spaces of constant curvature and to the equations of equilibrium of an isotropic elastic medium in curved space of three dimensions. The notations adopted are those given in the Geometria Differenziale of Burgatti, Boggio and Burali-Forti. In the usual notation of tensor analysis formula (3) of the paper is the well-known $u_{\alpha, \alpha}^{\alpha} - u_{\alpha, \alpha}^{\alpha} = R_{\alpha}^{\beta \alpha} u_{\beta}$. On defining $(\Delta_2 \mathbf{u})_i$ as $u_{i, \alpha}^{\alpha}$ and $(\text{rot } \mathbf{u})_{rs}$ as $u_{r, s} - u_{s, r}$ we

obtain $(\Delta_2 \mathbf{u})_i = (\text{grad div } \mathbf{u})_i - (\text{rot } \mathbf{u})_{\alpha i, \alpha} - R_{\alpha}^{\beta \alpha} u_{\beta}$. For spaces of constant curvature this reduces to $(\Delta_2 \mathbf{u})_i = (\text{grad div } \mathbf{u})_i - (\text{rot } \mathbf{u})_{\alpha i, \alpha} - (n-1) u_i$ and for $n=3$ we have the formulae (8), (8') which are the main results of the paper. *Murnaghan.*

Rabaté, G.: Sur les notions originelles de la géométrie infinitésimale directe. Toulouse: Diss. 1931. 60 S.

Ist \mathcal{E} eine beschränkte Punktmenge des dreidimensionalen euklidischen Raumes, p ein Punkt von \mathcal{E} , so gehört nach Bouligand ein von p ausgehender Halbstrahl γ zur Kontingens von \mathcal{E} in p , wenn p für jeden zu γ symmetrischen Kreiskegel mit p als Spitze Häufungspunkt der in ihm gelegenen Punkte aus \mathcal{E} ist, und es gehört eine Gerade \mathcal{G} zur Paratingens von \mathcal{E} in p , wenn in jeder Umgebung von p sich Punktepaare aus \mathcal{E} derart finden, daß die durch sie bestimmten Geraden sich gegen \mathcal{G} häufen. Dann ist jeder Halbstrahl der Kontingens auf einer Geraden der Paratingens gelegen. Wird \mathcal{E} längs einer nicht in der Kontingens enthaltenen Richtung projiziert, so ist bei Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung von p in \mathcal{E} die Kontingens der Projektion gleich der Projektion der Kontingens. Ein entsprechender Satz gilt für die Paratingens. Weiter wird gezeigt, daß die Kontingens eines jeden einfachen Jordanbogen und die Paratingens eines jeden ebenen Kontinuum selbst ein „Kontinuum“ ist. Schließlich werden noch entsprechende Verallgemeinerungen der Begriffe: Schmiegeebene, Schmiegekreis und -kugel untersucht und hinreichende Bedingungen für ihre eindeutige Bestimmtheit angegeben. *Reinhold Baer (Halle a. S.).*

Topologie:

Flexner, William W.: On topological manifolds. Ann. of Math., II. s. 32, 393–406 (1931).

Unter einer topologischen Mannigfaltigkeit M_n wird ein metrischer, kompakter Raum verstanden, dessen Punkte in beliebig kleinen offenen simplizialen Komplexen E_n mit folgenden 2 Eigenschaften enthalten sind: der Rand $F(E_n)$ ist ein irreduzibler $(n-1)$ -Zyklus mod. 2 mit den absoluten Betti- und Torsionszahlen der $(n-1)$ -Sphäre (zur Terminologie vgl. S. Lefschetz, Topology, New York 1930); es gibt in einem Euklidischen Raum eine zu $F(E_n)$ homöomorphe Menge F' und einen Punkt p , so daß die Summe aller Strecken, die p mit den Punkten von F' verbinden (und paarweise nur p gemeinsam haben), zu $E_n + F(E_n)$ homöomorph ist. E_n hat also die absoluten Betti- und Torsionszahlen der n -Sphäre. Jede M_n ist mit einer Teilmenge eines Euklidischen Raumes S_r von genügend hoher Dimension r homöomorph; man kann daher sofort $M_n \subset S_r$ annehmen. Ein „elementarer“ Komplex K ist ein singulärer Komplex, der mit Hilfe gewisser endlicher, M_n überdeckender Umgebungssysteme $U^k = \{E_n^{k,i}\}$ ($k = -1, 0, \dots, n$) konstruiert wird und die Eigenschaft besitzt, daß jedes $E_n^{k,i}$ einen Eckpunkt enthält. Die Zellen von K liefern Inzidenzmatrizen für M_n (genau wie die simplizialen Zellen einer Mannigfaltigkeit, die in simpliziale Zellen zerlegt werden kann) und damit endliche „elementare“ Betti- und Torsionszahlen für M_n . Komplexe, Zyklen usw. schlechthin auf M_n sind gewöhnliche singuläre Komplexe, Zyklen usw. Die Menge aller dieser Zyklen und ihrer Homologien, die „topologisch“ genannt werden, kann man zur Berechnung von topologisch invarianten Betti- und Torsionszahlen benutzen. Durch einen Deformationssatz wird gezeigt, daß jeder Zyklus mit einem elementaren Zyklus homolog ist, und daß jede topologische Berandungsrelation zwischen elementaren Zyklen eine elementare Berandungsrelation zwischen ihnen impliziert und umgekehrt. Mithin sind die topologisch invarianten Betti- und Torsionszahlen mit den elementaren identisch und daher endlich. — Des weiteren wird die Orientierbarkeit einer M_n und in einer orientierbaren M_n der Kroneckerindex $(\gamma_p \cdot \gamma_{n-p})$ zweier Zyklen γ_p und γ_{n-p} definiert. *Nöbeling (Wien).*

Flexner, William W.: The Poincaré duality theorem for topological manifolds. Ann. of Math., II. s. 32, 539–548 (1931).

In einer orientierten topologischen Mannigfaltigkeit M_n (zur Definition vgl. das vorang. Referat) gilt für den Kroneckerindex der Veblensche Satz: In einem maxi-

malen System $\gamma_p^1, \dots, \gamma_p^h$ von unabhängigen, nichtberandenden p -Zyklen in M_n existiert ein maximales System nichtberandender $(n-p)$ -Zyklen $\Gamma_{n-p}^1, \dots, \Gamma_{n-p}^h$ in M_n , so daß $(\Gamma_{n-p}^i \cdot \gamma_p^j) = \delta^{ij}$ ist. Weiter gilt für die Bettizahlen P_i der Poincarésche Dualitätssatz $P_i = P_{n-i}$. Dieser Satz macht es möglich, für eine Abbildung T einer zusammenhängenden M_n auf sich selbst den Brouwerschen Abbildungsgrad zu definieren und zu zeigen, daß er sich nicht ändert bei stetiger Deformation von T . In einer nicht orientierten M_n gelten diese Sätze mod. 2. Nöbeling (Wien).

Brown, Arthur B.: Note on the Alexander duality theorem. *Ann. of Math.*, II. s. 32, 391–392 (1931).

Eine Punktmenge D hat eine i -te topologische Bettizahl R_i , wenn in D ein maximales System von R_i unabhängigen i -Zyklen existiert. Dabei bezieht sich die Unabhängigkeit auf die Homologie und diese auf endliche Komplexe. Verf. bringt einen neuen Beweis für den folgenden Satz: Sei S eine n -Mannigfaltigkeit mit den Bettizahlen einer n -Sphäre; sei D eine Teilmenge der Punkte von S , welche topologische Bettizahlen besitzt; K sei eine abgeschlossene Menge, welche in einer bez. S offenen Teilmenge von D enthalten ist; dann gilt $R_i(D - K) = R_i(D) + R_{n-i-1}(K)$ für $i = 0, 1, \dots, n-1$, wobei $R_{n-i-1}(K)$ die Vietorisische Bettizahl ist. Nöbeling.

Rham, Georges de: Sur l'analyse situs des variétés à n dimensions. *J. de Math.*, IX. s. 10, 115–200 (1931).

Im 1. Kapitel werden kombinatorisch-topologische Homologieeigenschaften von Ketten beliebiger Dimension entwickelt, das 2. Kapitel betrifft die Schnittsysteme im Zusammenhang mit den Verknüpfungskoeffizienten und im 4. werden diese Betrachtungen durch den Nachweis von Beispielen ergänzt. Im Hauptteil (Kap. 3) werden die kombinatorisch-topologischen Begriffe auf Felder c_q angewendet. Ein solches Feld ist aus Zellen zusammengesetzt, von denen jede aus einem n -tupel von Funktionen x_1, x_2, \dots, x_n besteht, welche in einem q -dimensionalen konvexen Polyeder definiert und 2mal differenzierbar sind. Zellen, die durch lineare Transformation aus einander hervorgehen, sind gleich (entgegengesetzt), je nachdem die Transformationsdeterminante positiv (negativ) ist. Die Zusammensetzung von c_q aus den Zellen erfolgt im Sinne der Homologie, d. h. entgegengesetzte Zellen heben sich auf, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge. Die Zellen von c_q werden von gewissen Zellen c_{q-1} berandet. Diese ergeben zusammen die Grenze von c_q , welche selbst ein c_{q-1} ist. Verschwindet die Grenze, so heißt c_q geschlossen. Ist andererseits c_q selbst Grenze, so ist es nullhomolog. Auf den Feldern werden Differentialformen vom Grade q mit 2mal differenzierbaren Koeffizienten betrachtet. Eine solche Differentialform heißt geschlossen, wenn ihre Ableitung (vom Grade $q+1$) verschwindet; die Ableitung selbst heißt nullhomolog. Ist c_q die Begrenzung von c_{q+1} , so gilt die Stokessche Formel $\int \omega' = \int \omega$.

Aus ihr folgt, daß das Integral einer nullhomologen Form ω' erstreckt über ein geschlossenes Feld verschwindet, und ebenso das Integral einer geschlossenen Form über ein nullhomologes Feld. Von diesem Satze werden unter einer gewissen einschränkenden Bedingung folgende Umkehrungen bewiesen: eine geschlossene Form, deren Perioden (= Integral einer geschlossenen Form über ein geschlossenes Feld) alle verschwinden, ist nullhomolog. Zu P homolog unabhängigen q -dimensionalen Feldern kann man eine geschlossene Form vom Grade q finden, deren Integrale auf den P Feldern vorgegebene Werte annehmen. Die q -te Bettische Zahl ist zugleich die Maximalzahl der homolog unabhängigen Felder und auch die der homolog unabhängigen Differentialformen vom Grade q . Friedrich Levi (Leipzig).

Wilson, W. A.: On quasi-metric spaces. *Amer. J. Math.* 53, 675–684 (1931).

Ein Raum R heißt quasi-metrisch, wenn je 2 Punkten x, y 2 Zahlen xy und yx zugeordnet sind, die erstens für $x \neq y$ positiv, für $x = y$ gleich Null sind, und zweitens der Dreiecksungleichung $xz \leq xy + yz$ genügen. Der gewöhnliche Begriff des Limespunktes zerfällt hier in 3 verschiedene, je nachdem, ob man $x_i x \rightarrow 0$, $x_i x_i \rightarrow 0$ oder

$x_i x \rightarrow 0$ und $x x_i \rightarrow 0$ verlangt. Analog zerfallen metrisch definierte Begriffe wie abgeschlossene Menge, offene Menge usw. in je drei Begriffe. Der Verf. untersucht diese Begriffe und das Verhältnis des quasi-metrischen Raumes zum metrischen und topologischen Raum. Nöbeling (Wien).

Brown, A. B.: On the join of two complexes. Bull. amer. math. Soc. **37**, 417—420 (1931).

Diese Arbeit enthält einige Sätze über die Struktur des Verbindungskomplexes („join“) zweier Komplexen, insbesondere die Werte der Homologiezahlen des Verbindungskomplexes. van Kampen (Baltimore).

Hopf, Heinz: Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen. J. f. Math. **165**, 225—236 (1931).

Jede Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche F_p auf F_q bestimmt, bis auf innere Automorphismen der Fundamentalgruppe \mathfrak{G}_q von F_q , eine Homomorphie von \mathfrak{G}_p auf einer Untergruppe von \mathfrak{G}_q , also eine Homomorphismenklasse von \mathfrak{G}_p in \mathfrak{G}_q . Der Verf. beweist mit Hilfe der universellen Überlagerungsflächen, daß umgekehrt jede beliebige Homomorphismenklasse von \mathfrak{G}_p in \mathfrak{G}_q in dieser Weise von einer und nur einer Abbildungsklasse von F_p auf F_q bestimmt wird. Bei Übergang zur Faktorkommutatorgruppe geht die Homomorphie von \mathfrak{G}_p in \mathfrak{G}_q über in die Homomorphie der eindimensionalen Homologiegruppen \mathfrak{B}_p und \mathfrak{B}_q . Diese letzte Homomorphie wird durch die Angabe einer Matrix festgelegt. Für $q = 1$ kann die Matrix vollständig beliebig gewählt werden und bestimmt dann allein die Abbildungsklasse. Im allgemeinen Fall bestimmt die Matrix den Abbildungsgrad, und es gibt einige Relationen zwischen ihren Kennzahlen, die am einfachsten formuliert werden können mit Hilfe einer ebenfalls von der Abbildungsklasse bestimmten Homomorphie von \mathfrak{B}_q in \mathfrak{B}_p . Es werden einige einfache Folgerungen aus diesen Relationen gezogen, wobei die Fälle $c = 0$ und $c \neq 0$ sich als wesentlich verschieden herausstellen. Schließlich zeigt der Verf., daß die Matrix auch das Verhalten der Schnitzzahlen bei der Abbildung vollständig bestimmt, teilweise in sehr einfacher und übersichtlicher Weise.

van Kampen (Baltimore).

Freudenthal, Hans: Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Z. **33**, 692—713 (1931).

Ist \mathfrak{G} ein topologischer Raum im Sinne von Hausdorff, so definiert jede absteigende Folge offener, zusammenhängender Gebiete mit kompaktem Rand und verschwindendem Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen einen „Endpunkt“ von \mathfrak{G} . Zwei derartige Folgen definieren dann und nur dann denselben Endpunkt, wenn in jedem Gebiet der einen Folge eines der anderen enthalten ist. Ist \mathfrak{G} überdies zusammenhängend, im kleinen zusammenhängend, im kleinen kompakt und genügt dem zweiten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom, so entsteht durch Hinzufügen der Endpunkte (deren Umgebungen dann die sie definierenden Gebiete sind) ein kompakter, \mathfrak{G} umfassender topologischer Raum \mathfrak{G}^* , derart, daß die Gesamtheit $\mathfrak{G}^* - \mathfrak{G}$ der Endpunkte von \mathfrak{G} in \mathfrak{G}^* abgeschlossen ist, aus lauter Häufungspunkten von \mathfrak{G} besteht und nur einpunktige zusammenhängende Mengen enthält. Sind \mathfrak{H} und \mathfrak{G} zwei den obigen Bedingungen genügende topologische Räume, $[\mathfrak{H}, \mathfrak{G}]$ ihr topologisches Produkt im Sinne von Steinitz und \mathfrak{H} nicht kompakt, so hat $[\mathfrak{H}, \mathfrak{G}]$ genau einen Endpunkt, wenn \mathfrak{G} nicht kompakt ist; ist aber \mathfrak{G} kompakt, so lassen sich die Enden von \mathfrak{H} und $[\mathfrak{H}, \mathfrak{G}]$ isomorph aufeinander beziehen. Ein Raum \mathfrak{G} heißt ein Schiebraum, wenn er über die bisher vorausgesetzten Eigenschaften hinaus noch eine einfach transitive Menge von topologischen Abbildungen mit folgenden Eigenschaften besitzt: 1. Von der Identität abgesehen sind alle Abbildungen fixpunktfrei. 2. Verstehen wir unter dem „Parameter“ einer Abbildung das Bild eines ausgezeichneten Punktes, so hängt bei den Abbildungen von den drei Punkten: Parameter, Original und Bild jeder von den beiden anderen stetig ab. Die den Schiebraum definierenden Abbildungen induzieren topo-

logische Abbildungen von \mathcal{G} , bei denen alle Endpunkte von \mathcal{G} Fixpunkte sind. Jede kompakte Teilmenge von \mathcal{G} läßt sich durch derartige Abbildungen in jeden Endpunkt „deformieren“. Schließlich besitzt ein Schiebraum höchstens zwei Endpunkte. Unter den Begriff des Schiebraums fallen auch die Gruppenräume; allerdings ist dann \mathcal{G} i. A. kein Gruppenraum.

Reinhold Baer (Halle a. S.).

Mechanik der Punkte und starren Körper.

Koopman, B. O.: *Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space.* (Dep. of Math., Columbia Univ., New York.) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 315 bis 318 (1931).

The region R of definition of the Hamiltonian $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ contains a variety Ω defined by integrals of the system. The transformation $S_t: (q^0, p^0) \rightarrow (q, p)$ gives a one-parameter group of automorphisms of Ω and possesses an integral invariant $\int \rho d\omega$ taken over any region of Ω , ρ being positive and single-valued. The Hilbert space \mathfrak{H} comprises such single-valued complex functions $\varphi(A)$ (A a point of Ω) which possess the customary integrable properties over Ω . The one-parameter group of transformations in \mathfrak{H} defined by $U_t \varphi(A) = \varphi(S_t A)$ is unitary. U_t has an infinitesimal generator P , a self-adjoint linear operator. The spectral resolution of U_t and P is discussed. U_t has the property: $U_t F(\varphi_1, \varphi_2, \dots) = F(U_t \varphi_1, U_t \varphi_2, \dots)$. From this, if φ is an eigenfunction ($U_t \varphi = e^{i\theta} \varphi$), $U_t |\varphi| = |\varphi|$; $P|\varphi| = 0$ if defined. Thus $|\varphi|$ has the property of an integral of the system. Otherwise write $\varphi = e^{i\Theta(A)}$, then $P\Theta = \lambda$ if defined, and $\lambda = \text{const.}$ represents a “surface of section” of the system. If $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ are eigenfunctions, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ their eigenvalues (as above), and m_1, \dots, m_k integers, then $\varphi = \varphi_1^{m_1} \dots \varphi_k^{m_k}$ is an eigenfunction of eigenvalue $\lambda = \sum m_s \lambda_s$; if here $\lambda = 0$, φ may be an integral. Further extensions of the theory are suggested.

F. W. Doermann (New York).

Vitali, Giuseppe: *Alcuni elementi di meccanica negli spazi curvi.* Ann. Mat. pura ed appl., IV. s. 9, 75–89 (1931).

Verf. bedient sich jener Begriffsbildungen und Methoden, die er in seinem Buche „Geometria nello spazio Hilbertiano“ (Bologna 1930) eingeführt hat. Seine Behandlung dynamischer Probleme zeichnet sich durch große Eleganz, Einfachheit und Invarianzcharakter aus. Im 1., theoretischen Teil der vorliegenden Note wird der Reihe nach der Begriff des Vektors im n -dimensionalen Raum und seine Transformationsgesetze, der Begriff der Bewegung eines Punktes in diesem Raum und seine Geschwindigkeit aufgestellt und schließlich werden Kraftfelder definiert und beschrieben, sowie das Verhalten von materiellen Punkten in denselben. Verf. wird hierbei dazu geführt, jedem materiellen Punkt eine zweifache Masse (massa inerte und massa attiva) zuzuordnen. Im 2., praktischen Teil wird zunächst der Fall der Zentralbewegung im dreidimensionalen Raum behandelt unter der Voraussetzung, daß die Attraktionskraft verkehrt proportional ist dem Quadrate der Entfernung. Dann geht Verf. zu der Annahme über, daß der gewöhnliche Raum ein sphärischer Raum sei, eingebettet in einen vierdimensionalen linearen Raum, und behandelt dort ebenfalls die Zentralbewegung mit dem Newtonschen Anziehungsgesetz. Er erhält Bewegungsgesetze, die den gewöhnlichen analog sind, und ebenfalls nicht instand sind, Perihelbewegungen für die Planeten zu liefern. Verf. gibt der Meinung Ausdruck, daß es durch Abänderung des Attraktionsgesetzes in diesem Falle gelingen könnte, zu Bewegungsgleichungen zu kommen, die eine Perihelbewegung ergeben und insbesondere jene des Merkurs zu berechnen gestatten.

E. Schuntner (Wien).

Féraud, Lucien: *Les systèmes complètement stables au voisinage d'un point d'équilibre.* C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1699–1701 (1931).

Die Note, die sich in dem von Birkhoff [vgl. z. B. Amer. J. Math. 49, 1 ff. (1927)] vor einigen Jahren erschlossenen umfassenden Gedankenkreis bewegt, bringt ohne

Andeutung der Beweise einige Angaben über das Verhalten der Lösungen in der Umgebung einer (näher zu definierenden) „bedingt stabilen“ Gleichgewichtslage eines allgemeinen Oszillators mit endlich hohem Freiheitsgrad. *Wintner* (Baltimore).

Störmer, Carl: Ein Fundamentalproblem der Bewegung einer elektrisch geladenen Korpuskel im kosmischen Raume. I. *Z. Astrophys.* **3**, 31—52 (1931).

Der Aufsatz bezweckt die Diskussion der Differentialgleichungen des dynamischen Systems, das entsteht, wenn man eine elektrisch geladene Korpuskel der vereinigten Wirkung eines ruhenden magnetischen Elementardipols und einer von diesem ausgehenden, dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionalen Zentralkraft unter Zugrundelegung der speziellen Relativitätstheorie und unter der Annahme aussetzt, daß das derart gegebene Feld durch die Bewegung der Korpuskel nicht gestört wird (in der eigentlichen Formulierung der zu behandelnden Aufgabe — S. 32, Z. 3 des kursiv gedruckten Absatzes — handelt es sich um einen Schreibfehler, da doch das Potential der Zentralkraft nicht logarithmisch gewählt wird). Für dieses zeitunabhängige System mit drei Freiheitsgraden werden zwei Integrale ausführlich hergeleitet, das eine ist einfach der Energiesatz, und auch die Existenz des anderen ist selbstverständlich, wenn man bemerkt, daß nach Einführung von Zylinderkoordinaten eine der Koordinaten, nämlich der Azimut, zyklisch (ignorierbar) wird. Die Differentialgleichungen der beiden anderen Zylinderkoordinaten werden aufgestellt (S. 37), können aber auf Grund der beiden bekannten Integrale nicht erledigt werden, und um dies zu beheben, müssen gewisse höhere Terme in den Differentialgleichungen vernachlässigt werden, was unter Zugrundelegung einer von Goursat [*C. r.* **108**, 446 (1889)] angegebenen Variablenvertauschung erfolgt. Die derart gekürzten Differentialgleichungen können auf Quadraturen zurückgeführt werden, die elementare und elliptische Funktionen liefern. — Der Energiesatz gibt zu (den Hillschen Grenzkurven entsprechenden) Nullgeschwindigkeitsflächen Anlaß, die in dem nicht relativistischen Fall bereits in den früheren Arbeiten des Verf. weitgehend diskutiert und auf das Problem des Nordlichtes angewandt worden sind. *Wintner* (Baltimore).

Gugino, E.: Sul comportamento delle forze di reazione nel moto di un qualsivoglia sistema materiale sollecitato da forze posizionali. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. **13**, 269—274 (1931).

In continuation of considerations in previous articles (in which it was shown that for both holonomic and nonholonomic systems the forces of constraint can be obtained by purely algebraic processes as functions of coordinates, velocities, and time) the author here discusses the particular case in which the applied forces are purely positional. It is then shown that the force of constraint upon any particle of the system can be resolved into three components as follows: 1. A “positional” component, which is a function of the configuration and the time; and which comprises the total force of constraint for vanishing velocities and applied forces. 2. A “kinetic” component, which is a quadratic function of the velocity magnitudes with vectorial coefficients involving their directions, the configuration, and the time; and which comprises the total force of constraint for vanishing applied forces and constraints independent of the time. 3. A “static” component, which is a linear function of the applied force magnitudes with vectorial coefficients involving their directions, the configuration, and the time; and which comprises the total force of constraint for vanishing velocities and constraints independent of the time. *F. W. Doermann* (New York).

Bauer, Paul S.: Dissipative dynamical systems. I. (*Cruft Labor. a. Fatigue Labor., Harvard Univ., Cambridge [U. S. A.]*) *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 311—314 (1931).

The author considers linear dynamical systems with equations of motion:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = Q_i(t),$$

the coefficients being functions of t and symmetric in their indices. This last property permits writing the equations in the form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad \text{with} \quad T = \sum \sum_0^t a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j dt,$$

etc. Employing then a theorem of Davis [Trans. Am. Math. Soc. **30**, 711 (1928)] giving the condition that a system of differential equations be the Eulerian equations of the minimizing of an integral, he demonstrates: I. The equations of motion of a conservative ($F \equiv 0$) dynamical system are given by a variational principle if and only if the masses (a_{ij}) are constant. II. Those of a dissipative ($F \neq 0$) system are so given if and only if the dissipation coefficients (b_{ij}) are identically equal to the rates of change of the corresponding masses.

F. W. Doermann (New York).

Denizot, A.: *Zur Theorie des Gyroskops von Foucault.* (Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 455—458 (1931).

Der Verf. greift auf seine Kreiselgleichungen zurück, die er in den Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. **1914** veröffentlicht hat. Sie geben die Bewegungen eines Kreisels in bezug auf ein drehendes Bezugssystem wieder. Die Gleichungen gehen in die Eulerschen Gleichungen über, wenn das Bezugssystem mit der Winkelgeschwindigkeit des Kreisels rotiert und mit den Hauptträgheitsachsen des Kreisels zusammenfällt. Diese Gleichungen wendet der Verf. zur Berechnung eines Foucaultschen Kreisels auf der rotierenden Erde an. Da jedoch die Drehgeschwindigkeit der Erde gegenüber der Kreiseldrehung äußerst klein ist, so geben die Gleichungen von Denizot bei der zahlenmäßigen Auswertung keine nennenswerte Verbesserung gegenüber den Näherungslösungen, die im Lehrbuch von Klein und Sommerfeld gegeben sind. Ich glaube aber, daß die Gleichungen von D. bei schneller drehenden Bezugssystemen von Bedeutung sein können, z. B. für die Berechnung von Kreiselbewegungen auf Flugzeugen.

M. Schuler (Göttingen).

Lenk, H.: *Die Bewegungsgleichungen des rollenden Rades.* Z. angew. Math. u. Mech. **11**, 206—224 (1931).

Auf Grund der Galilei-Newtonschen Gesetze der Relativbewegung werden die Bewegungsgleichungen eines als Rotationskörper vorausgesetzten Rades mit vollkommen starrer und symmetrischer Lauffläche abgeleitet, indem von den besonders einfachen Gleichungen in bezug auf dasjenige räumliche Rechtssystem ausgegangen wird, dessen Anfangspunkt mit dem Bodenberührungspunkt P zusammenfällt, und dessen Achsen durch die Schnittgerade der Radebene mit der (starren) Bodenebene E sowie durch die Bodennormale festgelegt sind. Die Führungs- und Corioliskräfte sowie die durch sie bedingten Momente werden ermittelt; ferner werden die verschiedenen Arten der in Frage kommenden eingepprägten Kräfte und Widerstände im einzelnen besprochen. Die Berücksichtigung von Bodenunebenheiten gelingt durch Annahme einer Translationsbewegung der Bodenebene E in der zu ihr senkrechten Richtung Z gemäß einer Gesetzmäßigkeit von der Form $Z = Z(t)$, so daß der Bodenberührungspunkt P eine Raumkurve durchläuft, deren Gestalt durch den sonstigen Verlauf der Radbewegung bedingt wird. Eine allgemeine Integrationstheorie der erhaltenen Bewegungsgleichungen wird nicht gegeben; vielmehr begnügt sich der Verf. mit der Betrachtung einiger einfacher Spezialfälle sowie mit dem Hinweis auf einige Analogien der freien rollenden Radbewegung auf einer Ebene zur Kreiseltheorie. Schließlich werden die Radgleichungen auf den Fall kleiner Abweichungen von einer kreisförmigen Bahn umgeformt, was praktisch für Schwingungs- und Stabilitätsuntersuchungen wichtig erscheint.

Harry Schmidt (Köthen).

Jouguet, Emile: *Amortissement des oscillations et stabilité séculaire.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **3**, 111—113 (1931).

Es werden die klassischen Resultate über säkulare Stabilität im Sinne von William Thomson für Systeme, die weniger Forderungen unterworfen sind als üblich, wieder erhalten. Es werden nämlich über die zweiten Ableitungen des Potentials keine An-

nahmen gemacht; von den Reibungskräften wird vorausgesetzt, daß die von ihnen geleistete Arbeit positiv ist und nur zugleich mit allen Geschwindigkeiten verschwindet. Es werden die folgenden Sätze bewiesen. Ist ein Gleichgewichtszustand stabil, so klingen alle Störungen ab, und das System strebt einem Gleichgewicht zu. Die Forderung, V sei ein Minimum, ist für die säkulare Stabilität notwendig und hinreichend. Weiter werden analoge Resultate für den Fall solcher beständiger Bewegungen erhalten, deren nichtzyklische Koordinaten konstant gehalten werden und Reibungskräften unterworfen sind, deren zyklische Koordinaten aber der Bedingung $\dot{r}_i = \text{const}$ genügen und reibungsfrei sind. Wie bekannt ist im letzteren Falle die Forderung $V = \text{Minimum}$ nicht mehr notwendig. Zum Schluß wird ein Beispiel aus der Kreiseltheorie erläutert.

A. Andronow u. A. Witt (Moskau).

Pöschl, Th.: Über Hauptschwingungen für endliche Schwingungsweiten. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 123—124 (1931).

Als Hauptschwingungen eines mechanischen Systems für endliche Amplituden (nicht-lineare Bewegungsgleichungen) werden vom Verf. solche Bewegungsformen bezeichnet, bei denen die Perioden der einzelnen Freiheitsgrade gleich groß sind. Zur Erläuterung der aus dieser Definition entspringenden Problemstellung wird das folgende Beispiel betrachtet. Eine große Masse M , die waagerecht verschiebbar ist, führt um einen Fixpunkt 0 einfache harmonische Schwingungen aus; an M ist mit einem Faden ein gewöhnliches Pendel mit der kleinen Masse m befestigt, dessen Bewegung an die lotrechte Ebene durch 0 gebunden ist. Die Forderung der Gleichheit der Perioden führt zu einer Beziehung zwischen den Konstanten des Problems. Zum Schluß wird auf die Bedeutung verwandter Fragen hingewiesen.

V. Fock (Leningrad).

Liénard, A. M.: Oscillations auto-entretenues. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 173—177 (1931).

Der einfachste Fall eines Autoschwingungssystems wird durch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung $dx/dt = P(x, y)$, $dy/dt = Q(x, y)$ beschrieben. Das Verhalten der Integralkurven in der x, y -Ebene wird durch eine Differentialgleichung erster Ordnung gegeben. Den Gleichgewichtszuständen entsprechen singuläre Punkte; periodischen Bewegungen solcher Systeme, welche für die Anwendungen von besonderem Interesse sind (Radiotelegraphie, Akustik, Maschinenlehre usw.) entsprechen sog. Grenzzykel von Poincaré, d. h. isolierte geschlossene Integralkurven. [A. Andronow, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. C. R. Acad. Sci. Paris 189, 559 (1929).] Die effektive Lösung der Frage nach der Existenz und Zahl der Grenzzykeln für eine gegebene Differentialgleichung ist von Poincaré nur angedeutet (Poincaré, Oeuvres T. I, S. 73; vgl. D. Hilbert, Mathematische Probleme. Problem 16) und die von ihm erhaltenen Resultate führen nur in gewissen Fällen zum Ziel. [Dulac, Bulletin du service technique de l'aéronautique. fasc. 4 (1920). — A. Andronow u. A. Witt, Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol. Arch. f. Elektrotechn. 24, 99 (1930).] Verf. untersucht die Differentialgleichung

$$d^2x/dx^2 + \omega f(x) dx/dt + \omega^2 x = 0,$$

durch welche eine Reihe von Autoschwingungssystemen, die von praktischem Interesse sind, beschrieben wird. (Diese Differentialgleichung wurde von van der Pol [On relaxation oscillations. Phil. Mag. Ser. 7, 2, 978 (1926)] für den Fall $f(x) = x^2 - 1$ auf graphischem Wege ausführlich behandelt.) Nach der Substitution $y = v/\omega + F(x)$,

wo $v = dx/dt F(x) = \int_0^x f(x) dx$ kommt Verf. zur Gl. $dy/dx = x/F(x) - y$ und stellt

die Frage nach der Existenz und Zahl geschlossener Integralkurven, die periodischen Bewegungen entsprechen. Mit Hilfe einer elementaren und eleganten geometrischen Methode zeigt Verf.: Ist $F(x)$ eine ungerade Funktion, die negativ zwischen 0 und $x_0 > 0$, dann positiv ist und niemals abnimmt (diese Bedingungen sind in einer Reihe von praktisch interessanten Fällen erfüllt), so existiert eine und nur eine geschlossene

Integralkurve (ein und nur ein Grenzykel. Ref.). Diese periodische Lösung, d. h. diese geschlossene Integralkurve, ist stabil in dem Sinne, daß alle benachbarten Integralkurven für $t \rightarrow \infty$ sich auf sie aufrollen. Der Schluß dieser Arbeit, der eine kurze Darstellung einer Arbeit des Verf. (*Revue Générale d'Electricité* 1928) ist, ist der Aufstellung analytischer Stabilitätsbedingungen für periodische Bewegungen gewidmet, für einen etwas allgemeineren Fall als den früheren. A. Andronow u. A. Witt (Moskau).

Salomon, Bernard: *Considérations sur le problème du changement de vitesses progressif.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 114—122 (1931).

Die variable Übersetzung einer Geschwindigkeit in eine andere ist eine häufig gestellte Aufgabe, deren Lösung sich meist auf die Getriebeelemente Platte und Friktrionsrad oder Riemenscheibe und Riemen zurückführen läßt (nichtholonome Systeme ohne Unstetigkeiten in den Nebenbedingungen). Der Verf. untersucht an Hand der Lagrangeschen Gleichungen, ob sich dieselbe Aufgabe nicht mit einem Verband, dessen Nebenbedingungen holonom und periodisch unstetig sind, lösen läßt; der Verband selbst soll keine Energie absorbieren. Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen wird für Systeme bis zu 3 Freiheitsgraden gezeigt, daß es nicht möglich ist, ein derartiges Getriebe anzugeben. Auch aus der Analogie mit entsprechenden elektrischen Maschinen ergibt sich keine Lösung. Zieher (Stuttgart).

● **Beyer, Rudolf:** *Technische Kinematik. Zwanglaufmechanik nebst Bewegungsgeometrie und Dynamik der Getriebe in Theorie und Praxis. Zum Gebrauche bei Vorlesungen, in Konstruktionssälen und beim Selbststudium.* Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1931. XII, 504 S. u. 642 Abb. RM. 50.—.

Die Namen dreier Forscher umreißen das Programm des Werkes: Reuleaux, Burmester und Wittenbauer, denen in entsprechender Weise die drei Hauptteile gewidmet sind. So bringt der erste Hauptteil „Zwanglaufmechanik“ die Grundlagen der Zwanglauflehre mit ausführlicher Berücksichtigung von Grübler und Reuleaux. Außerdem werden die Grundformen der ebenen und — wenn auch kurz — die der räumlichen Getriebe dargestellt. Im zweiten Hauptteil „Bewegungsgeometrie der Getriebe“, dem ein Kapitel über Vektorrechnung zur Einführung vorausgesetzt ist, werden neben den üblichen Methoden der graphischen Kinematik tiefere Untersuchungen der geometrischen Beziehungen herangezogen, wie sie in den Arbeiten von Burmester, R. Müller, Mehmke, Hartmann u. a. niedergelegt sind. Insbesondere wird der Getriebesynthese eingehende Beachtung geschenkt, wobei neben anderen die Ergebnisse von Alt herangezogen werden. Auch in diesem Teil ist das Eingehen auf die Geometrie der räumlichen Bewegung wertvoll, besonders wo sie durch eine Erläuterung der abbildungstheoretischen Verfahren der räumlichen Kinematik ergänzt sind (Mayor, v. Mises, Prager, Mehmke, der Verf.). Wesentlich kürzer ist der dritte Hauptteil „Dynamik der Getriebe“, bei welchem die Arbeiten Wittenbauers und Federhofers im Vordergrund stehen. Außer der Kinetostatik der Getriebe werden noch der Dynamik der Mehrkurbeltriebe einige Abschnitte gewidmet. Praktische Wege zur Lösung der dabei auftretenden Differentialgleichungen werden nur kurz gestreift. Bei den getriebesynthetischen Betrachtungen wird der reine Kinematiker vielleicht manchmal ein ausführlicheres Eingehen auf weitere interessante Fragen der Kinematik der Ebene, insbesondere der des Gelenkvierecks vermissen, wie auch eine etwas schärfere Fassung der Sätze und Begriffe, was beides durch die Beschränkung des wesentlich für den Ingenieur gedachten Stoffes bedingt ist. Doch wird man reichlich entschädigt einerseits durch ein ausführliches Literaturverzeichnis und andererseits dadurch, daß jede theoretische Betrachtung sofort durch ein entsprechendes Beispiel aus der Praxis richtig beleuchtet wird (was übrigens für alle Teile gilt). Eigene Untersuchungen des Verf. ergänzen das Gebrachte wertvoll. Pädagogisch geschickt ist es, die behandelten Aufgaben zunächst sehr ausführlich zu bringen, um den Lernenden über anfängliche Schwierigkeiten hinwegzubringen. Insgesamt ein beachtliches Werk, das sowohl zur Einführung und zum gründlichen Studium als auch zum Nachschlagen sehr geeignet ist und dem reinen Kinematiker wertvolle Hinweise auf die praktischen Anwendungen gibt.

W. Meyer zur Capellen (Koblenz, Mosel).

● **Mack, Karl:** *Geometrie der Getriebe.* Berlin u. Wien: Julius Springer 1931. VI, 93 S. u. 76 Abb. RM. 8.50.

Der erste Teil enthält die Bewegung in der Ebene, wobei ausführlich die Theorie der Verzahnung mit parallelen Achsen dargestellt ist. Im zweiten Teil ist die Bewegung um einen festen Punkt behandelt, und zwar als Bewegung im Bündel wie als sphärische Bewegung; ein großer Abschnitt ist der Theorie der Verzahnungen gewidmet, bei denen die Getriebeachsen

sich schneiden. In einem kürzeren dritten Teil werden noch die Grundlagen der allgemeinen Bewegung im Raume gebracht, mit Anwendung auf die Getriebe mit windschiefen Achsen. In allen 3 Teilen wird die Bewegung nur im Hinblick auf die hervorgerufenen Ortsveränderungen behandelt. Die Zeit tritt nirgends explizit als Veränderliche auf, d. h. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden nicht betrachtet. Da das Buch im wesentlichen aus einführenden Vorlesungen erwachsen ist, setzt es nur die Grundlagen der darstellenden Geometrie voraus; es verdient aber Beachtung als geschlossene Darstellung der Bewegungsgeometrie überhaupt.

S. Gradstein (Darmstadt).

Myard, F. E.: Sur les chaînes fermées à quatre couples rotoïdes non concourants déformables au premier degré de liberté. Isogramme torique. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1194—1196 (1931).

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, eine räumliche kinematische Kette aus 4 Gliedern von einem Freiheitsgrad zu bestimmen, derart, daß an den Paarungsstellen nur Rundlingspaare auftreten, deren Achsen sich nicht schneiden. Wählt man auf dem einen durch die doppelberührende Ebene an einer Ringfläche erzeugten Kreise einen Punkt S , verbindet ihn mit dem Mittelpunkt O der Ringfläche, mit dem Mittelpunkt Ω des genannten Kreises und mit dem Mittelpunkt M des erzeugenden Kreises, dessen Ebene durch die Rotationsachse z geht, so erhält man das räumliche Viereck OSM , die gesuchte kinematische Kette. Die Achsen der Rundlingspaare sind bzw. OZ , ΩX (senkrecht zur doppelberührenden Ebene) und MY (in der Ebene des von M beschriebenen Kreises und senkrecht zu diesem). Der Verf. weist nun nach, daß bei S kein Kugelgelenk anzubringen ist, sondern ein Rundlingspaar, dessen Achse SU senkrecht ΩS ist und in der genannten Ebene liegt (Zeichenfehler). Die viergliedrige Kette ist somit dadurch ausgezeichnet, daß einander gegenüberliegende Seiten gleich sind und daß die Drehachsen bzw. senkrecht geschränkt sind, wobei der Schränkungswinkel $xz = k$ durch die Beziehung festgelegt ist $\sin k = r/R$, wo r das kleine Glied ist (Radius des erzeugenden Kreises) und R das große (Radius des Schnittkreises bzw. des Kreises von M). Die Geschwindigkeitsverhältnisse bei festgehaltenem Glied werden noch erörtert. — Die Kette müßte sich auch als Sonderfall der Grüblerschen Zwanglaufkriterien darstellen lassen.

W. Meyer zur Capellen (Koborn, Mosel).

Myard, F. E.: Chaîne fermée à cinq couples rotoïdes, déformable au premier degré de liberté. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1352—1354 (1931).

Verf. behandelt eine räumliche viergliedrige kinematische Kette mit 5 Rundlingspaaren, deren Achsen sich nicht schneiden, von einem Freiheitsgrad (s. a. vorstehendes Ref.). Legt man wieder an eine Ringfläche eine doppelberührende Ebene, welche die beiden Kreise A (Mittelpunkt Ω) und A' (Mittelpunkt Ω') herauschneidet, so kann die Ringfläche auch erzeugt werden durch Rotation von A' um die Achse z . Dabei schneidet A' fortlaufend A in S . Man erhält dann eine räumliche Kette (A' beliebig liegend) mit den Gliedern $O\Omega$, ΩS , $S\Omega'$ und $\Omega'O$. Die Achsen der Rundlingspaare sind entsprechend OZ , $X\Omega$ (senkrecht zur Ebene von A), $X'\Omega'$ (senkrecht zur Ebene von A'). Um Zwanglauf zu erhalten, müssen in S 2 Rundlingspaare (Kreuzgelenk) angebracht werden, deren Achsen US' und US in der Ebene A' bzw. A liegen und senkrecht zu $\Omega'S'$ bzw. ΩS sind. Die Kette ist dadurch ausgezeichnet, daß die in den Punkten O bzw. S zusammenstoßenden Glieder einander gleich sind und daß die Achsen x und u bzw. x' und u' senkrecht geschränkt sind, und daß der Schränkungswinkel $xz = x'z = k$ durch die Beziehung festgelegt ist $\sin k = r/R$, wo r die Länge des kleinen Gliedes ist und R die des großen. — Der Beweis wird auch noch geführt mit Benutzung der durch $\Omega S (= R)$ und $\Omega'S (= R)$ erzeugten Regelflächen (Ω beweglich), die in Zusammenhang mit gewissen Rotationshyperboloiden stehen.

W. Meyer zur Capellen (Koborn, Mosel).

Myard, F. E.: Sur les chaînes fermées à cinq couples rotoïdes, déformables au premier degré de liberté. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1527—1528 (1931).

In Fortsetzung früherer Arbeiten (vgl. vorstehende Ref.) kündigt der Verf. eine weitere ausführliche Arbeit über die räumlichen kinematischen Ketten mit 5 Rundlingspaaren von einem Freiheitsgrad an. So findet er eine zweite Kette dieser Art und eine mit 6 Rundlingspaaren.

W. Meyer zur Capellen (Koborn, Mosel).

Mechanik der elastisch und plastisch deformierbaren Körper.

Nadai, A.: Plastic torsion. An experimental determination of the stress distribution in a bar which has been twisted to the limit of plasticity. (*Res. Labor., Westinghouse Electr. & Mfg. Co., East Pittsburgh, Pa.*) Trans. amer. Soc. mechan. Eng. **53**, 29—48 (1931).

If a cylindrical or prismatic bar is acted upon by a continually increasing torque, plastic regions develop near the boundary of the cross-section and spread into its interior until ultimately they cover the whole cross-section. The distribution of stress at any stage in the process can be studied by the aid of a plastic stress function combined with the usual elastic stress function. The latter is most conveniently represented by the well known Prandtl membrane analogy. The plastic stress function is shown by considerations similar to those used in establishing the membrane analogy to be represented by a surface of constant slope erected over the boundary of the cross-section. The surface of a heap of sand standing on a plane base whose shape is that of the cross-section is such a surface. To show the development and spreading of the plastic regions, a glass or metal roof representing the plastic stress function is erected over the boundary of an opening whose shape is that of the section to be studied. A uniformly stretched membrane is also attached to the boundary of the opening and deflected upward by a uniform pressure on its lower side. The regions of contact of the membrane and the roof or rather the projections of these regions on the plane of the cross-section are the plastic regions. They are made visible by sprinkling a white powder on the membrane. The powder is caught by a thin film of oil on the under side of the roof. As the pressure on the membrane increases, the regions of contact increase until ultimately the membrane is in contact with the entire roof. Many photographs accompanying the paper show the development and spreading of the plastic areas in various cross-sections. There are also numerous photographs of models representing the plastic stress function. A slight modification of the apparatus is used to show the spreading of the plastic area in the vicinity of a groove in the side of a cylindrical bar under torsion. Numerous photographs of etchings of cross-sections of twisted steel bars show the development and extension of slip layers as the plastic areas are extended. *H. W. March* (Madison).

Fritsche, Josef: Arbeitsgesetze bei elastisch-plastischer Balkenbiegung. *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 176—191 (1931).

Mit A. Haar und Th. v. Kármán (*Gött. Nachrichten* **1909**, 204) fordert der Verf. die Gültigkeit der Variationsprinzipie der Elastizitätstheorie (Variation des Formänderungszustandes, Variation des Spannungszustandes) auch für den elastisch-plastischen Zustand und zeigt, wie mit Hilfe dieser Prinzipie Aufgaben der technischen Balkenbiegungslehre auch in solchen Fällen gelöst werden können, in denen das Stabmaterial teilweise in den plastischen Zustand eintritt. Die Art des Gleichgewichtes wird gekennzeichnet durch das Vorzeichen der zweiten Variation des Energieinhaltes bei einer zulässigen Variation des Formänderungszustandes, Verschwinden dieser zweiten Variation bedeutet Übergang von stabiler zu labiler Gleichgewichtslage, also Erreichen der Tragfähigkeit des Balkens. *Prager* (Göttingen).

Zoja, R.: Sulla distribuzione delle tensioni in un solido ad asse rettilineo con sezione trasversale rettangolare di altezza variabile. *Nota I. Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. **13**, 520—523 (1931).

Der Verf. untersucht die Spannungsverteilung in einem geraden Stabe von rechteckigem Querschnitt veränderlicher Höhe, der an einem Ende eingespannt und nur am anderen Ende belastet ist. Es wird in ähnlicher Weise wie in der technischen Balkenbiegungslehre ein System von Spannungen angegeben, das die Randbedingungen der Aufgabe und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt; ob es auch den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie genügt, wird nicht geprüft. *Prager* (Göttingen).

Roy, Maurice: Contribution au problème de Saint-Venant et à l'étude des poutres prismatiques à parois minces, dans le cas de la torsion pure. (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 39—51 (1931).

Es wird erstens folgender Satz bewiesen: Wenn die Schubspannungslinien eines tordierten Profils alle untereinander gleichförmig sind, dann ist das Profil eine Ellipse. Weiter wird mittels der Theorie der konformen Abbildung eine strenge Lösung gegeben für den geschlitzten Kreisring. Das Gebiet wird abgebildet auf einen Kreisring mit zwei symmetrischen Schlitzten, und damit kann eine Lösung von Villat (für ein hydrodynamisches Problem) unmittelbar angewandt werden. Die Lösung ist sehr kompliziert und ist nur für den längs eines Radius geschlitzten Vollkreis zum numerischen Endergebnis geführt worden.

Den Hartog (Göttingen).

Ono, Akimasa: Biegung zusammengesetzter Stäbe mit besonderer Rücksicht auf Stoßverbindung von Eisenbahnschienen. Z. angew. Math. u. Mech. 11, 165—175 (1931).

Für die Berechnung der Spannungen und Durchbiegungen von 2 miteinander verbundenen Stäben, deren Achsen im lastfreien Zustand in einer Geraden liegen, wird angenommen, daß die beiden Stäbe in der Biegungsebene Querkkräfte aufeinander ausüben, welche proportional sind der Durchbiegungsdifferenz der Stabachsen an jedem Punkte. Kennzeichnend für die elastische Nachgiebigkeit der Verbindung ist ein Koeffizient α , welcher der „Bettungsziffer“ für den gebogenen Balken auf elastischer Unterlage entspricht. Es wird der Fall eines an beiden Enden gestützten und in der Feldmitte belasteten Trägers behandelt, der aus 2 verbundenen Stäben besteht, so daß die Überlappungsstrecke der beiden Stäbe kleiner als die Feldweite ist und sich in der Feldmitte befindet. Mit Hilfe der hierfür geltenden Beziehungen wird aus entsprechend angeordneten Versuchen die Nachgiebigkeitsziffer α für die Verbindung Schiene—Lasche berechnet, deren numerischer Wert stark von dem Befestigungszustand der Verbindung abhängt. Unter Verwendung der so gewonnenen α -Werte werden die Spannungen in Schiene und Lasche im Betriebsfall ermittelt bei Annahme des jeweils ungünstigsten Befestigungszustandes und der ungünstigsten Laststellung. Nach diesen Rechnungen ist das Laschenmaterial im Vergleich mit dem Schienenmaterial sehr hoch beansprucht.

K. Hohenemser (Göttingen).

Leduc, René: Contribution à l'étude des poutres prismatiques. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 52—57 (1931).

Auf Grund der St. Venantschen Torsionstheorie werden Näherungsformeln abgeleitet für die Torsionssteifigkeit dünnwandiger offener sowie geschlossener Profile, welche übereinstimmen mit den Formeln, die sonst aus der hydrodynamischen Analogie abgeleitet werden. Die Arbeit enthält weiter eine Berechnung des Schubmittelpunktes eines geschlitzten kreiszylindrischen Rohres und eine Formel für die Knicklast eines dünnwandigen offenen Profils: $\sigma = G I / I_0$, wo σ die kritische Druckspannung, I die Torsionssteifigkeit und I_0 das polare Trägheitsmoment des Querschnittes bedeuten. Somit ist auch die Knicklast für offene dünnwandige Profile sehr klein. Die Arbeit ist ein Auszug aus einer Dissertation (Nr. 215) der Universität von Paris.

Den Hartog.

Weber, C.: Bestimmung des Steifigkeitswertes von Körpern durch zwei Näherungsverfahren. Z. angew. Math. u. Mech. 11, 244—245 (1931).

Wird ein Stab durch ein Moment M_d um den Winkel ϑ pro Längeneinheit verdreht, dann ist die Formänderungsarbeit je Längeneinheit $A = M_d \vartheta / 2$ und der Drillungswiderstand

$$J_d = \frac{M_d}{\vartheta G} = \frac{M_d^2}{2 G A} = \frac{2 A}{\vartheta^2 G},$$

wo G der Gleitmodul ist. Wählt man einen Spannungszustand, der den Gleichgewichtsbedingungen genügt und dem Moment M_d äquivalent ist und drückt A durch die Spannungen aus, dann ist die so berechnete Formänderungsarbeit immer größer als diejenige des wirklich auftretenden Spannungszustandes; man erhält einen zu kleinen Wert für J_d . Wählt man einen Verschiebungszustand, welcher den Bedingungen des inneren Zusammenhanges genügt und einer Drillung ϑ entspricht und drückt A durch die Verzerrungsgrößen aus, dann ist wieder die so berechnete Formänderungsarbeit größer als diejenige des wirklich auftretenden Verzerrungszustandes; man erhält jetzt einen zu großen Wert für den Drillungswiderstand J_d , so daß der tatsächliche Wert zwischen einer oberen und einer unteren Grenze eingeschlossen ist.

K. Hohenemser.

Steuermann, E.: Some considerations of the calculation of elastic shells. Symmetrical shells (i. e. shells which have the form of a body of revolution) loaded symmetrically. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 60—65 (1931).

Die Methode der asymptotischen Integration, welche von O. Blumenthal (Z. Math. u. Phys. 62, 343) zur Berechnung sphärischer elastischer Schalen mit konstanter Dicke angewendet wurde, wird verallgemeinert für die Berechnung rotations-symmetrischer Schalen ungleicher Wandstärke. Es wird gezeigt, daß Blumenthals Methode identisch ist mit der Methode der sukzessiven Approximation.

K. Hohenemser (Göttingen).

Poukka, K. A.: Über einige Plattenprobleme. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 66—70 (1931).

Folgende Plattenaufgaben werden in geschlossener Form gelöst: 1. Die kreisförmige, am Rande frei aufliegende Platte mit linear veränderlicher Belastung. 2. Die halbkreisförmige Platte, die auf ihrem Durchmesser frei aufliegt und längs des Kreisbogens eingespannt ist, mit linear veränderlicher Belastung, die auf dem Durchmesser Null wird. 3. Die halbkreisförmige, am ganzen Rande frei gestützte Platte mit linearer Belastung (wie bei 2). 4. Die am ganzen Rande frei aufliegende Halbkreisplatte mit gleichförmig verteilter Belastung. Die Lösungen werden hinsichtlich der größten Durchbiegung diskutiert.

E. Weinel (Göttingen).

Sibert, H. W.: Moderately thick circular plates with plane faces. Trans. amer. math. Soc. 33, 329—369 (1931).

Für die Verschiebungen U, W in radialer und axialer Richtung einer zentral-symmetrisch belasteten dicken Kreisplatte macht der Verf. den Ansatz

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r) \frac{z^n}{n!}; \quad W(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \frac{z^n}{n!}, \quad (1)$$

wobei die Funktionen $U_n(r)$ und $W_n(r)$ nur von der radialen Koordinate abhängen. Aus der Bedingung, daß die Verschiebungskomponenten den Grundgleichungen der Elastizität genügen, folgt für die Ausdrücke U_n und W_n ein System von unendlich vielen simultanen Differentialgleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} U_n &= -\frac{1}{1-2\sigma} \frac{d}{dr} \left[W_{n-1} + 2(1-\sigma) \left(\frac{dU_{n-2}}{dr} + \frac{U_{n-2}}{r} \right) \right], \\ W_n &= -\frac{1}{1-2\sigma} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left[U_{n-1} + (1-2\sigma) \frac{dW_{n-2}}{dr} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo $\sigma = 1/m$ die Querdehnungszahl bedeutet. Betrachtet man diese Gleichungen als Rekursionsformeln für die Koeffizienten U_n und W_n , so lassen sich durch sukzessive Anwendung der Rekursion U_n und W_n durch die n ersten Ableitungen von U_0, U_1, W_0, W_1 darstellen. Der Verschiebungszustand in der Platte ist also vollständig bekannt, wenn in Gl. (1) jeweils die beiden ersten Koeffizienten der Entwicklung ermittelt sind. U_0, U_1, W_0, W_1 bzw. U_0, W_0 und zwei lineare Kombinationen \bar{W}_0, \bar{U}_0 der vier Koeffizienten bestimmen sich aus den Randbedingungen an der Plattenober- und Unterseite ($z = \pm h$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -p(r), \quad \tau_{zr} = 0 & (z = +h), \\ \sigma_z &= 0, \quad \tau_{zr} = 0 & (z = -h), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo $p = p(r)$ die Oberflächenbelastung der Platte angibt. Für $U_0, W_0, \bar{U}_0, \bar{W}_0$ gibt der Verf. unendliche Entwicklungen an, die der Gl. (3) genügen, und deren Koeffizienten so zu bestimmen sind, daß die noch freien Randbedingungen am zylindrischen Plattenrand eingehalten werden. Diese Randbedingungen werden in der für dünne Platten üblichen Weise durch Aussagen über die Spannungsmittelwerte bzw. die Mittelwerte der Randverschiebungen formuliert. Für die folgenden Belastungsfälle ist die Koeffizientenbestimmung vollständig durchgeführt. I. Die volle Kreisplatte: 1. mit

kontinuierlich verteilter Belastung, 2. mit Einzellast in der Mitte, 3. mit kontinuierlicher Belastung eines konzentrischen Ringgebietes. II. Die Kreisringplatte: 1. wie bei I, 1, 2. mit gleichförmiger Scherkraftverteilung am inneren Lochrand.

E. Weinel (Göttingen).

Howland, R. C. J.: On stresses in flat plates containing rivet holes. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 74—79 (1931).

Die Spannungen in einem Streifen mit freien, parallelen Rändern und einem kreisrunden Loch in der Mitte werden in bekannter Weise als Ableitungen einer Spannungsfunktion χ dargestellt, χ wird durch sukzessive Approximation ermittelt: $\chi = \chi' + \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \dots$. χ' : bekannte Lösung für eine in der Streifenmitte längs der Streifenachse angreifende Einzelkraft, χ_0 erfüllt die Bedingungen für $r = 1$ (Lochrand) in unendlicher Scheibe, χ_1 kompensiert die durch χ_0 entstandenen Spannungen am äußeren Rand, χ_2 die durch χ_1 entstandenen am Lochrand u. s. f. Die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Reihenentwicklungen für χ_i werden angegeben:

$$\chi_i = \sum_n (\alpha + \beta r^2) r^{2n} \cos 2n \Theta + \sum_n (\gamma + \delta r^2) r^{2n+1} \sin (2n + 1) \Theta.$$

Als Beispiel werden die Spannungen um ein Loch mit einem Durchmesser gleich $1/2$ Streifenbreite bei gleichförmigem Zug p im ungestörten Streifen angegeben, die maximale Spannung am Lochrand beträgt $4,3 p$, am äußeren freien Rand $1,86 p$. Mit im wesentlichen gleicher Methode wird auch eine Spannungsverteilung um ein Nietloch berechnet.

Mesmer (Göttingen).

Neményi, P.: Über Spannungsfelder, die mit bekannten Strömungsfeldern isomorph sind. (*Inst. f. Techn. Strömungsforsch., Techn. Hochsch., Berlin.*) (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 155—166 (1931).

Ein ebener Spannungszustand und eine ebensolche Potentialströmung sollen zueinander isomorph genannt werden, wenn das Spannungstrajektorienetz des Spannungszustandes mit dem Potential- und Stromliniennetz der Strömung zusammenfällt. Für eine Anzahl von bekannten Singularitäten der Hydrodynamik werden die dazu isomorphen singulären Spannungsfelder in der natürlichen (Laméschen) Darstellung hergeleitet und diskutiert. In der Ausdehnung der Isomorphie-Fragestellung auf die Gesamtheit aller ebenen Potentialströmungen glaubt der Verf. einen neuen Weg zur Behandlung elastischer Randwertprobleme zu erblicken.

E. Weinel.

Coker, E. G., and R. Levi: On St. Venant's principle of equipollent loads in cases of plane stress. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 171—175 (1931).

Mittels der spannungsoptischen Methode (Durchleuchtung ebener Celluloidmodelle mit polarisiertem Licht während der Belastung) wird für 2 einfache Beispiele gezeigt, in welcher Entfernung von einer Störungsstelle man in elastischen Spannungszuständen von den geometrischen Einzelheiten der Störung absehen kann. Das Verfahren scheint sich zur Prüfung dieser Frage in speziellen Fällen sehr gut zu eignen.

G. Mesmer (Göttingen).

Dirksen, B.: Stereophotogrammetrische Deformationsmessung. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 181—184 (1931).

Die Möglichkeit, zweidimensionale Deformationen durch zeitlich aufeinanderfolgende Aufnahmen vom gleichen Standpunkt aus wie ein nach bekannten Methoden vermeßbares Raumbild zu behandeln, wird erläutert und nach Genauigkeit usw. diskutiert. Dreidimensionale Deformationen können prinzipiell durch 2 zeitlich aufeinanderfolgende Raumstereoaufnahmen ebenfalls untersucht werden. Abbildungen zeigen die Anwendung des Verfahrens auf Erddruck, elastische Verformungen und Flüssigkeitsströmungen.

G. Mesmer.

Hovgard, William: Bending of curved pipes. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 331—341 (1931).

Die Arbeit berichtet über experimentelle Bestätigung bereits vorliegender Näherungsformeln für die Spannungen und Formänderungen in biegebeanspruchten, gekrümmten, kreisrunden Rohren [vgl. des Verf. Aufsätze im *Journal of Mathematics and Physics* of the Massachusetts Institute of Technology, 6, 7, 8 (1926—1929)], und zwar wurden Verformungen der Rohrachse, des Rohrquerschnitts und der Querschnittselemente gemessen. Für alle, zum Teil stark gekrümmte Rohre ergab sich gute Bestätigung sowohl im elastischen wie im beginnenden plastischen Zustand.

G. Mesmer (Göttingen).

Chwalla, Ernst: Elastostatische Probleme schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse. Sitzsber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa. 140, 163—198 (1931).

Es handelt sich um die Biegung von geraden Rohren mit kleiner Wandstärke und großer Länge durch Endmomente und Längsdrücke mit Berücksichtigung der Deformation der Querschnitte. In ähnlicher Art hat schon Th. v. Kármán in seiner Arbeit „Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsrohre“, Z. V. d. I. 55, 1889—1895 (1911), den Einfluß der Querschnittsverformung untersucht. Außer der querkraftsfreien Biegung durch Endmomente wird das Gleichgewichtsproblem zentrisch und exzentrisch gedrückter schlanker Rohre behandelt und zum Schluß alle bekannten Lösungstypen vom Standpunkte ihrer kennzeichnenden Eigenschaften aus zusammenfassend betrachtet. Zur Durchführung der Rechnungen wird die Verformung des Kreisringquerschnittes in plausibler Weise als elliptisch angenommen und die Verformung selbst bis zur vollständigen Zusammendrückung, d. i. bis zum Schlitz betrachtet. Der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Achsenkrümmung ist — auch in zulässiger Annäherung — kein linearer mehr, wie er nach der üblichen Näherungstheorie für Vollprofile erhalten wird. An Stelle der geraden Linie für diesen Zusammenhang tritt eine Kurve, die auch nur für sehr kleine $1/\rho$ dieser anschmiegt, beim „kritischen Zustand“ ein Maximum erreicht, und für den Schlitz ($a/r = \pi/2$) gegen Null geht. Die Durchbiegung in der Trägermitte wird für den „kritischen Zustand“ mehr als doppelt so groß als bei Vernachlässigung der Abplattung. Bei plastischem Material wird das Tragvermögen nicht nur durch die Abplattung, sondern auch durch den sinkenden Materialwiderstand beeinflusst. Für zentrischen Druck wird ein neuer Lösungstypus gefunden, der sich oberhalb der Stabilitätsgrenze als eindeutig, unterhalb bereichsweise als mehrdeutig erweist und hierin von der bekannten, für Vollstäbe geltenden Lösung abweicht. Seine Bedeutung wird durch ein Beispiel aus der Punktmechanik: schwerer Punkt auf welliger Unterlage verdeutlicht. Er besitzt ein weitreichendes Analogon in der Lösung für einen exzentrisch gedrückten Vollstab aus einem beschränkt Hookeschen Material mit ausgeprägter Stabilitätsgrenze. Durch Betrachtung dieses Typus gelangt der Verf. zu der Folgerung, daß der Kirchhoffsche Eindeutigkeitssatz so zu formulieren ist: Ist die Belastung bis auf einen gemeinsamen Multiplikator λ gegeben, dann gibt es ein λ_0 , so daß für alle $\lambda < \lambda_0$ eindeutige Gleichgewichtslagen existieren; λ_0 kann jede beliebige Größe annehmen und auch unbeschränkt gegen Null gehen. Th. Pöschl (Karlsruhe).

Pohl, K.: Berechnung der Ringversteifungen dünnwandiger Hohlzylinder. Stahlbau 4, 157—163 (1931).

Bei Beanspruchung dünnwandiger Hohlzylinder auf Biegung werden die Einzelasten durch Versteifungsringe stets als tangentielle Belastung auf die Zylinderwand übertragen. Die Berechnung dieser Ringe wird zunächst zurückgeführt auf die Berechnung eines durch symmetrisch angeordnete radiale Kräfte belasteten biegungsfesten Kreisringes, an dem als Reaktionen tangentielle Kräfte, nach dem Sinusgesetz stetig verteilt, angreifen. Zur Berücksichtigung der wahren Umfangsverteilung der äußeren Kräfte, die vor allem als Windlasten auftreten, für deren Ansatz die Göttinger Modellversuche benutzt sind, wird die Einflußlinie für das Ringmoment infolge radialer Belastung abgeleitet. Die entsprechende Einflußlinie bei tangentialer Last gestattet die Berücksichtigung von evtl. auftretenden Reibungskräften; der Fall einer exzentrisch angreifenden Last wird durch die Einflußlinie des Lastmomentes erledigt. Den Abschluß bildet ein Zahlenbeispiel.

S. Gradstein (Darmstadt).

Timoshenko, S.: Stability and strength of thin-walled constructions. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 3—15 (1931).

Der Verf. gibt eine Übersicht über die in letzter Zeit erschienenen Arbeiten in bezug auf die Stabilität dünnwandiger Konstruktionen: gedrückte Platten, auf Knickung belastete Röhren und Profileisen, durch Rippen versteifte Platten, Bleche mit vernach-

lässigbarer Biegesteifigkeit usw. Eine wertvolle Literaturübersicht beschließt den Artikel.

Biezeno (Delft).

Panetti, Modesto: Notizie generali sulle oscillazioni dei veicoli. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 16—27 (1931).

Die Arbeit gibt eine übersichtliche Darstellung der jetzigen Kenntnisse über Schwingungserscheinungen in Dampf- und elektrischen Lokomotiven sowie in Automobilen. Behandelt werden u. a. die Einflüsse der Reifenelastizität und der Schwungmasse der vorderen Räder auf die Stabilität der geradlinigen Bewegung eines Automobils sowie die pseudoharmonischen Schwingungen, die in elektrischen Lokomotiven auftreten.

Den Hartog (Göttingen).

Effenberger, Wilh.: Einheitliche Behandlung biegebeanspruchter und gedrückter Stäbe. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 39—43 (1931).

Bei der praktischen Bemessung von gebogenen Trägern soll die größte Durchbiegung nur einen bestimmten Bruchteil der Trägerlänge betragen. Das größte Biegemoment pro Volumeneinheit des Stabes läßt sich dann als Funktion des Schlankheitsgrades λ schreiben $\frac{M_{\max}}{Fl} = \frac{\alpha' E}{\lambda^2}$, wo F die Querschnittsfläche, l die Länge, E der

Elastizitätsmodul und α' ein von der Art der Belastung abhängender Faktor ist. Die theoretische Formel stimmt nur für große Schlankheitsgrade mit den Versuchen überein. Effenberger hat umfangreiche Versuchsserien an Holz und Stahl in Vorbereitung, aus denen $\frac{M_{\max}}{Fl} = f(\lambda^2)$ entnommen werden kann auch für solche Schlankheitsgrade, für welche die Naviersche Biegungstheorie nicht mehr zutrifft.

Hohenemser.

Broszko, M.: Über die allgemeine Lösung des grundlegenden Knickproblems. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 51—58 (1931).

Neuere Knickversuche an Stäben stimmen nicht mehr so gut mit der Kármán-Engesserschen Theorie der plastischen Stabknickung überein wie die früheren Kármánschen Versuche. Broszko vermutet einen wesentlichen Einfluß der unberücksichtigten Zeitwirkungen, worauf von Kármán in der Diskussion erwidert, daß Änderungen der Deformationsgeschwindigkeit bei seinen Versuchen nur geringe Abweichungen der Knicklasten ergeben. B. findet eine bemerkenswerte Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der einfachen Formel $\epsilon_k = \pi^2/\lambda^2$, wo λ der Schlankheitsgrad, ϵ_k die spezifische Verkürzung des Stabes im Augenblick des Ausknickens ist. Die Knickspannung σ_k errechnet er aus $\sigma_k = f(\epsilon_k)$, wo für $f(\epsilon_k)$ die empirisch gefundene Spannungs-Verkürzungslinie des Materials eingesetzt wird. Die Begründung für obige Formel ist, wie auch von Kármán bemerkt, nicht verständlich.

Hohenemser.

Grauers, Hugo: Gleichungen der Klangfiguren rechteckiger Platten. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 161—166 (1931).

The problem considered in this article is that of deriving the sound patterns (the Chladni figures) of a vibrating rectangular plate. Specifically the author considers the solution of the differential equation,

$$\Delta \Delta w + c_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

where c_1 , c_2 , and c_3 are constants depending upon the density and thickness of the plate, the elastic modulus, and the total compression on the boundaries of an equally distributed pressure. The three classical boundary conditions:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ (fixed edges),} \quad (1)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma = \text{Poisson's ratio (supported edges),} \quad (2)$$

and

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_1^2 w + (2 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ (free edges),} \quad (3)$$

are considered and a general solution is obtained in terms of circular and hyperbolic functions. Assuming the value $\sigma = .3$, the author specializes his solution to apply to a square plate of side a with free edges and checks his computations with those previously obtained by W. Ritz who, however, employed the value $\sigma = .225$. [See Ann. Physik (4) 28 737—786 (1909).] Parameters n and κ_n which enter the author's computation of the nodal lines of the plate are determined from the intersection of a set of curves of the form:

$$\sqrt{-(n+3)[(n+2)(1-\sigma)-1]^2 \operatorname{tgh} [a/2 \sqrt{-(n+1)c_3 \kappa_n}]} \\ = \sqrt{-(n+1)[(n+2)(1-\sigma)+1]^2 \operatorname{tgh} [a/2 \sqrt{-(n+3)c_3 \kappa_n}]}.$$

This determination is made explicitly by means of a set of eight tables previously published in Ingeniorvetenskapsakademiens Handlingar, No. 98. Five sound patterns are given for special determinations of the parameters and cases of double tones are indicated in them. A slight curvature of the lines in some of the patterns as previously noted by Ritz is also verified.

H. T. Davis (Bloomington).

Sezawa, K.: On the accumulation of energy of high-frequency vibrations of an elastic plate on its surfaces. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 167—172 (1931).

Waves of length λ are supposed to be produced by a shock at the center O of a uniform circular plate bounded by planes $2z = \pm H$ free from surface tractions. Expressions for the displacement D are expressed in terms of Hankel's second cylindrical function in the following cases: (1) asymmetrical vibrations involving dilatation and transverse displacement, the azimuthal component of D being large near O but not far from O . When $\lambda \gg H$ the deflection is approximately transverse and identical with that of the ordinary flexural vibration, the velocity of propagation, V , is proportional to H/λ and has the usual value which we call V_0 . When $\lambda \ll H$ the energy of vibration is very intense near the bounding planes and V has the value V_R for Rayleigh waves. For intermediate wave-lengths V lies between V_0 and V_R . (2) symmetrical vibrations not involving dilatation or transverse displacement, the radial component of D being large near O but not far from O . When $\lambda \gg H$ the vibration is approximately radial and V has a value V_1 independent of λ/H . When $\lambda \ll H$, $V = V_R$ and the energy is not concentrated as in case (1). For intermediate wave-lengths V lies between V_R and V_1 . Whenever $\lambda \ll H$ the boundary conditions at the edge of the plate are of small influence on the vibrations.

Bateman (Pasadena).

Kimball, A. L.: Analysis of vibration with solid friction damping. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 190—198 (1931).

Die Arbeit diskutiert die Schwingungen eines Systems mit nichtlinearer Dämpfung, wo vielmehr die Dämpfung auftritt in der Gestalt einer Hysteresisschleife beliebiger Gestalt. Eine Näherungslösung für die Amplitude der erzwungenen Schwingungen wird erzielt dadurch, daß die wirkliche Dämpfung ersetzt wird durch eine lineare, deren Konstante bestimmt wird durch die Forderung, daß die verzehrte Energie in beiden Fällen dieselbe ist. Das Verfahren wird angewandt auf einfache Schwingungssysteme und auf die longitudinalen Schwingungen eines Stabes. Den Hartog (Göttingen).

Carter, B. C.: The effects of viscous and solid friction in airscrew drives in damping torsional vibration. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 198a—198e (1931).

Erst werden einige praktische Schwingungssysteme mit 2 Freiheitsgraden und linearer Dämpfung gelöst. Dann werden die Schwingungen eines Systems mit trockener (Coulomb-) Reibung untersucht, $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx \pm d = e \cos \omega t$, wo die Gleichung mit $+d$ gilt für $\dot{x} > 0$ und mit $-d$ für $\dot{x} < 0$. Eine Lösung für den stationären Schwingungszustand wird gegeben.

Den Hartog (Göttingen).

Stenzel, H.: Die Berechnung der Strahlung am Rande eingespannter Membranen und die Ableitung und Anwendung allgemeiner Formeln für den Strahlungswiderstand. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 320—325 (1931).

Sound waves of length λ produced by a membrane of linear dimension b show an influence of direction except when $\lambda \gg b$ and an influence of radiation resistance except when $\lambda \ll b$. These influences are calculated for rectangular and elliptic membranes with the aid of formulas given by Rayleigh. The first influence is very easily calculated for a membrane clamped at two parallel edges $x = \pm b$ and driven by forces on the parallel median line so that the velocity amplitude is $c(b - |x|)$. For a point in the YZ -plane whose position is specified by an angle γ the direction characteristic is $cb^2 \sin^2 \varrho / \varrho^2$ where $\lambda \varrho = b\pi \sin \gamma$. For the corresponding piston membrane it is $cb^2 \sin 2\varrho / 2\varrho$ and there is agreement when $b \ll \lambda$. An expression for the radiation resistance of a rectangular membrane of sides a and b shows that for low frequencies the radiative resistance decreases very rapidly when the ratio $a:b$ departs appreciably from unity. The radiation resistance is also calculated for a row of n similar radiators equally spaced and of linear dimension small in comparison with the wave-length.

Bateman (Pasadena).

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Cisotti, U.: Circolazioni intorno a regioni di acqua morta limitate da una parete poligonale e da un pelo libero. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 247—253 (1931).

Es handelt sich um eine Fortsetzung der in dies. Zbl. 1, 242 referierten Arbeit. Der Verf. behandelt hier 2 Spezialfälle in Anlehnung an den Fall, daß der Totwasserbereich zum Teil durch eine feste Wand ω und zum Teil durch eine freie Oberfläche λ begrenzt wird. 1. Die feste Wand ω werde als geradlinig angenommen. Dann erhält man für die Beziehung zwischen Z und ζ -Ebene:

$$Z - Z_0 = \frac{2C}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(1 - \zeta^2) d\zeta}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\zeta - 1)^2}$$

bzw.

$$Z = \frac{4l}{4 - \pi} \left\{ \frac{2(2\zeta - i\sqrt{2})}{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\zeta - 1} - i \log \frac{i(\sqrt{2} + 1) - \zeta}{\zeta - i(\sqrt{2} - 1)} + i \log (\sqrt{2} + 1) - i\sqrt{2} \right\},$$

wo $2l$ die Länge der festen Wand ist. Der Umfang des Halbkreises $(1, i, -1)$ der ζ -Ebene geht in das Stück der reellen Z -Achse zwischen $Z = -l$ und $Z = +l$ über. (Feste Wand.) Der Durchmesser $(-1, 1)$ der ζ -Ebene geht dagegen in die freie Oberfläche über, deren Gestalt sich analytisch angeben läßt. Für die Geschwindigkeit $w = df/d\zeta$ ergibt sich:

$$w = -c \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\zeta - 1},$$

wo c der Wert der Geschwindigkeit in den Punkten der freien Oberfläche ist. Ferner erhält man für die Zirkulation:

$$C = \int_{\omega + \lambda} w dZ = \frac{4\pi}{4 - \pi} cl.$$

Bei der elektrostatischen Interpretation ergibt sich für die Verteilungsdichte mit $\zeta = e^{i\sigma}$:

$$\mu = (4 - \pi) \left(\frac{q}{2l} \right) \frac{\sqrt{2} - \sin \sigma}{\sqrt{2} + \sin \sigma}.$$

2. Die feste Wand werde durch einen Polygonzug gebildet, bestehend aus geradlinigen Seiten. Man erhält:

$$Z - Z_0 = \frac{2k}{\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} P(\zeta) \frac{1 - \zeta^2}{(\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\zeta - 1)^2} d\zeta,$$

wo

$$P(\zeta) = e^{i\vartheta_1} \prod_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{1 - \zeta e^{i\sigma_h}}{\zeta - e^{i\sigma_h}} \right)^{\vartheta_{h+1} - \vartheta_h} \frac{1}{\pi}$$

und $k = \text{const.}$ Hierbei ist: $\zeta = e^{i\sigma}$ und $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$ die fortlaufenden Neigungen der Polygonseiten gegen die reelle Achse. $\sigma_0 = 0, \sigma_1, \dots, \sigma_m = \pi$ sind (in Polarkoord.) die Kreisteilungspunkte der ζ -Ebene, die den Polygonecken der Z -Ebene entsprechen. Für die Geschwindigkeit ergibt sich:

$$w = -c \frac{\zeta^2 - 2i\sqrt{2}\zeta - 1}{\zeta^2 + 2i\sqrt{2}\zeta - 1} \cdot P^{-1}$$

und für die Zirkulation: $C = k \cdot c$. Zum Schluß werden die Resultate noch auf den Fall angewandt, daß das Polygon aus 2 Seiten von der Länge l besteht, die unter dem Winkel 2α gegeneinander geneigt sind. *J. J. Sommer* (München).

Sutton, W. G. L.: The stability of some discontinuous fluid motions. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 1196—1201 (1931).

When undisturbed the incompressible fluid is in steady two-dimensional motion with a gliding line of discontinuity $F(x, y) = 0$ at which the component velocities (U, V) , the density σ and the constant vorticity Z are discontinuous. In the disturbed state the line of discontinuity becomes $F(x, y) + f(x, y, t) = 0$ and the perturbation is specified by a velocity potential Φ and a stream-function Ψ . The conditions at the line $F = 0$ are then that the quantity

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} + V \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y}$$

must be zero on both sides and that there should be continuity of the expression

$$\sigma \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Z\Psi + Bf(U^2 + V^2) \right]$$

in which B denotes the curvature of the line $F = 0$ divided by the square root of the quantity $F_x^2 + F_y^2$. The results are used to discuss the stability of a single jet bounded by concentric circles. *Bateman* (Pasadena).

Sbrana, Francesco: Sui moti di un fluido incompressibile, simmetrici rispetto ad un asse. *Atti Soc. ligust. Sci.*, N. s. 10, 63—86 (1931).

With cylindrical coordinates r, ϑ, z and the vector notation of Gibbs, fluid motion symmetrical about an axis is specified by a velocity v which may be expressed in the form $v = \nabla \vartheta \times \nabla \Psi + \Phi \nabla \vartheta$, Φ and Ψ being solutions of the two equations

$$\frac{\partial(\Psi, \Theta)}{\partial(z, r)} = \nu r^3 \Psi',$$

$$\frac{\partial(\Psi, \Psi')}{\partial(z, r)} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi^2}{\partial z} + \frac{\nu}{r} D^2 \Psi,$$

where ν is the kinematic viscosity and

$$r^2 \Psi'' = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \equiv D^2 \Psi.$$

The vorticity and pressure can also be expressed in terms of Φ and Ψ . When $\nu = 0$ an interesting type of solution is obtained by putting $\Phi = c\Psi$, where c is a constant. A study is then made of the motion produced in the fluid by the helicoidal motion of a solid immersed in the fluid, special attention being paid to the case in which the solid is spherical. The resultant dynamical action on the solid is calculated by Prandtl's theory of adhering vortices and is found to be zero when there are no free vortices.

Bateman (Pasadena).

Leray, J.: Sur le système d'équations aux dérivées partielles qui régit l'écoulement permanent des fluides visqueux. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 1180—1182 (1931).

In a certain bounded domain π velocity components u_1, u_2, u_3 are required to satisfy (1) the equations of motion of Navier arranged so that the viscous and pressure

terms are on the left, the force and acceleration terms on the right, (2) the equation of continuity of an incompressible fluid. For greater generality the force terms in (1) are multiplied by a parameter K which also occurs in the boundary conditions

$$u_1 = K a_1, u_2 = K a_2, u_3 = K a_3 \quad (3)$$

in which a is a given vector. N^2 being the volume integral over π of the sum of the squares of the first derivatives of u_1, u_2, u_3 with respect to the rectangular coordinates, it is first shown that N^2 is less than a certain function of K . This result is then used to obtain quantities dominating the right hand sides of (1) and with the aid of results obtained by Odqvist it is shown that the moduli of the quantities u_1, u_2, u_3 and their first derivatives are less than certain functions of K and that the first derivatives satisfy a Lipschitz condition with a positive index less than one and a coefficient depending on K . As K varies continuously without passing through any one of the denumerable set of singular values (which have no point of condensation at a finite distance) the number of real solutions of the set of equations keeps the same odd value and so is not zero. The solutions are holomorphic functions of K . Bateman (Pasadena).

Oseen, C. W.: Das Turbulenzproblem. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 3—22 (1931).

Der vorliegende Bericht befaßt sich kritisch mit den neueren theoretischen Fragen über das Turbulenzproblem, wobei folgende Gesichtspunkte zugrunde gelegt werden: Der 1. Abschnitt setzt auseinander, was verschiedene Autoren unter dem nicht immer klar formulierten Begriff Turbulenz verstehen. Der 2., unter der Bezeichnung „Turbulenz und Stabilität“, faßt die Hauptergebnisse zusammen, die über die Randwertaufgabe des Turbulenzproblems, auf Grund der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen allein, vorliegen. Der 3. Abschnitt befaßt sich mit den an Zahl geringeren Ansätzen, die diese Gleichungen nicht als gültig ansehen, z. B. wie Henky, die Relaxationserscheinungen berücksichtigen wollen. Im 4. Abschnitt werden verschiedene auf den genannten Differentialgleichungen und Mittelwertbildungen beruhende Ansätze besprochen, wozu auch z. B. der Prandtlsche Mischungsweg gerechnet wird. Im 5. Abschnitt endlich wird die Hinzunahme der Statistik zu den Differentialgleichungen diskutiert, insbesondere der diesbezügliche ältere Ansatz von Kármán und neuere Arbeiten von Burgers. F. Noether (Breslau).

Noether, F.: Zur statistischen Deutung der Kármánschen Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie. Z. angew. Math. u. Mech. 11, 224—231 (1931).

Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese der Turbulenztheorie, welche annimmt, daß die turbulenten Schwankungsbewegungen der verschiedenen Schichten y_i der Hauptströmung sich nur durch einen von y_i abhängigen Längenmaßstab $L(y_i)$ (nach Prandtl Mischungsweg) und durch die Amplitude $A(y_i)$ der Schwankungsbewegung unterscheiden, gibt für diese beiden Größen die Beziehungen

$$\frac{U_0 L^2}{A} = \text{const} \quad (1); \quad \frac{L U_0''}{U_0'} = \text{const} \quad (2)$$

[$U_0(y)$ = Grundströmung]. Die letztere dieser beiden Beziehungen erhält Kármán unter Mitberücksichtigung der quadratischen Glieder der Stromfunktion der Schwankungsbewegung. Um auf einem anderen Wege diese Resultate abzuleiten, nimmt der Verf. an, daß die turbulente Strömung in ähnlicher Weise aus mehreren Wirbelreihen aufgebaut ist, wie dies bei der Kármánschen Wirbelstraße der Fall ist. Die Ausrechnung des Potentials dieser Strömung führt ohne weiteres auf die Kármánsche Gleichung (1). Eine einzelne dieser Wirbelreihen stellt immer einen labilen Strömungszustand dar. Die Querkomponente der turbulenten Schwankung kommt dadurch zustande, daß einzelne Wirbel ihre Reihe verlassen und in eine benachbarte übertreten. Durch Berechnung der für diese Querbewegung charakteristischen „Austrittswahrscheinlichkeit“ der Wirbel ergibt sich die Kármánsche Beziehung (2). Damit wird die Ähnlichkeitshypothese entbehrlich, ihre Resultate lassen sich auf rein statistischem Wege ableiten.

H. Schlichting (Göttingen).

Richardson, E. G., und E. Tyler: Synthetische Turbulenz. *Physik. Z.* 32, 509 bis 517 (1931).

Im theoretischen Teil dieser Arbeit geben die Verff. eine Ableitung der bekannten Resultate über die Strömung einer zähen Flüssigkeit entlang einer ebenen Wand und durch ein Rohr für den Fall, daß die begrenzenden Wände harmonische Schwingungen ausführen.

H. Schlichting (Göttingen).

Wigley, W. C. S.: Ship wave resistance. A description of the progress since 1924 in the development of the mathematical theory and its application to practical cases. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* 1, 58—73 (1931).

At the First Congress of this body in 1924, Dr. E. Hogner described the position of the above theory at that date. In the interval a considerable amount of work has been done by Professor Havelock in the calculation of resistance curves for two-dimensional forms of large draught, and on the whole the results shew surprisingly good agreement in general characteristics with practical experience. This work is described in detail in this paper as also is that of the author, which deals with three-dimensional forms which have been tested as models in the William Froude National Tank. Calculations have been made for seven forms, five having fore and aft symmetry and two without this characteristic. Some general conclusions are drawn from these results as to degree of agreement between fact and theory. One general conclusion is that the speeds at which maxima and minima of resistance occur are predictable with reasonable accuracy and some further mathematical exploration of the values of these speeds in some special cases and of the causes of the maxima and minima is also described.

Autoreferat.

Gabeault: Sur la résistance de l'air aux vitesses balistiques. *C. r. Acad. Sci. Paris* 192, 1630—1633 (1931).

Der Verf. berechnet den Widerstand und den Unterdruck eines Geschosses, das koaxial in einen gleichförmigen Luftstrom (Geschwindigkeit V_0 , Druck P_0 , spez. Masse ϱ_0) eingetaucht ist. Ist der zylindrische Teil des Geschosses lang genug, so daß man am hinteren Teil den Druck gleich P_0 setzen darf, so folgt für den Widerstand R bei einem Geschoß mit flachem Ende: (Schnur von Wirbelringen) $R = S(P_1 - P_0 + K \frac{1}{4} \varrho_{P_0} V_{P_0}^2)$, wobei P_1 der Druck an der Spitze des Geschosses und V_{P_0} , ϱ_{P_0} die dem Druck P_0 entsprechende Geschwindigkeit, spez. Masse ist, die nicht gleich V_0 , ϱ_0 wenn $V_0 > A_0$, wo A_0 die Schallgeschwindigkeit (für V_0, ϱ_0). K ist ein Koeffizient, der $= 1$ für $V_0 > A_0$ und < 1 für $V_0 < A_0$. Ist P_2 der wirkliche Druck am Geschoßende, so ergibt sich für den Unterdruck $P_0 - P_2 = K \frac{1}{4} \varrho_{P_0} V_{P_0}^2$. Die aus diesen Gleichungen berechneten numerischen Werte sind in befriedigender Übereinstimmung mit den experimentell gemessenen.

J. J. Sommer (München).

Adhémar, Robert Vte d': Étude du mouvement pendulaire d'un projectile tournant. Stabilité sur la branche descendante de la trajectoire. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* 2, 15—26 (1931).

Der Verf. berichtet über den derzeitigen Stand der Frage nach der Instabilität der Bewegung eines rotierenden Geschosses. Infolge von Störungen (Rückstoß, Bewegung des Geschützes, Gasexplosionen) wird die Geschoßachse aus der Tangentenrichtung der theoretischen Flugbahn gebracht. (Ablenkungswinkel δ .) Als Folge hiervon führt die Geschoßachse entweder eine Art Nutationsbewegung oder eine Art Präzessionsbewegung aus. Für die theoretische Behandlung der Frage ist der Koeffizient $k = \gamma/\delta$ von Bedeutung, wobei γ den Winkel bedeutet, den die im Punkte C auf der Geschoßachse angreifende Resultierende R der Widerstandskräfte mit der Tangentialrichtung der Flugbahn bildet. k ist hierbei eine Funktion der Lagekoordinaten des Geschoßschwerpunktes G . Die anfänglichen Abweichungen wachsen auf der Flugbahn an und können auf dem fallenden Teil derselben (Steilschuß) dazu führen, daß das Geschosß sich umdreht. Für die Stabilität ist maßgebend die Funktion $Q = \frac{Rk \cdot l \cdot v}{2\Omega \cdot g \cos \gamma}$,

die möglichst klein gehalten werden muß. (l = Entfernung GC , v Geschößgeschwindigkeit, Ω Rotationsgeschwindigkeit des Geschosses, \mathfrak{A} axiales Trägheitsmoment des Geschosses, τ Neigungswinkel der Flugbahntangente, g Erdbeschleunigung.) Mit gewisser Unsicherheit läßt sich δ unter gewissen Annahmen (ebene Geschößbahn, Unabhängigkeit der Störungsbewegung von der eigentlichen Geschößbewegung, kleine Abweichungen) berechnen. Die Unsicherheit in der Kenntnis von k und γ macht weitere Versuche notwendig. Der Einfluß des Magnuseffektes ist gering, und zwar stabilisierend.

J. J. Sommer (München).

Lorenz, H.: Hydraulische Widerstände. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.)

Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 94—101 (1931).

Der Verf. versucht durch ungewöhnliche Überlegungen das Widerstandsgesetz, die kritische Reynoldssche Zahl und die Geschwindigkeitsverteilung für turbulente Strömungen in glatten und rauhen Rohren zu erhalten. Die Definition der Wandrauhigkeit als „4fache mittlere Steigung der Unebenheiten der Wand“ läßt den in Wirklichkeit vorhandenen Einfluß der Korngröße auf den Widerstand vermissen. Auch sonst ist Verf. wenig in Kontakt mit den zahlreichen neueren Versuchsergebnissen, wie sich u. a. daraus ergibt, daß nach ihm bei turbulenter Rohrströmung das Geschwindigkeitsprofil im Querschnitt sich mit wachsender Entfernung vom Eintrittsquerschnitt „immer mehr einem parabolischen mit endlicher Randgeschwindigkeit nähert“ oder daß „fast alle bisher veröffentlichten Geschwindigkeitsprofile diesem (parabolischen) Endzustand nicht entsprechen und zugleich alle Erörterungen über Potenzgesetze der Geschwindigkeitsverteilung sich erledigen“.

H. Schlichting (Göttingen).

Riabouchinsky, D.: Théorie cavitationnelle de la résistance des fluides. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 148—158 (1931).

Es werden Überlegungen und Experimente angegeben, die die Vorgänge bei der Kavitation dem Verständnis und der rechnerischen Behandlung näher bringen. Neben Bemerkungen zur stationären Strömung mit Kavitation wird besonders die nichtstationäre Bewegung, das plötzliche Anfahren eines Körpers behandelt. Hier tritt der größte Unterdruck an dessen Rückseite auf. Die Hohlräume wirken dabei als Quellen bzw. Wirbelquellen mit veränderlicher Ergiebigkeit. Das in letzter Zeit mehrfach behandelte Problem der Kräfte an Quellen und Wirbeln und festen Körpern in ebener Strömung wird unter Hinweis auf die mehrfach nicht beachteten Prioritäten Riabouchinskys herangezogen. Bei der Beschleunigung wirkt das Geschwindigkeitsfeld wegen der Erhöhung seiner Energie als die bekannte scheinbare Masse, bei Kavitation tritt dazu die Arbeit zur Erzeugung und Vergrößerung der Hohlräume. Die bei plötzlicher Beschleunigung einer Scheibe normal zur Fläche sich hieraus ergebende zusätzliche scheinbare Masse hat die Größenordnung der gewöhnlichen scheinbaren Masse. R. weist darauf hin, daß auch die Gase bei derart heftigen Beschleunigungen nicht inkompressibel sind. Jedoch sind die Verdünnungen bei gleichem Überdruck in Luft entsprechend der geringeren zu beschleunigenden Masse gegenüber Wasser 700mal geringer. Ein Versuch mit einer durch Auffallen eines Gewichtes plötzlich beschleunigten Scheibe in Wasser und Luft bestätigte dies qualitativ. Bei niedrigeren Drucken über dem Wasser entstanden dabei im ganzen Gefäß kleine Blasen in dem Augenblick, wo der hohle Kern des beim Anfahren erzeugten Wirbelringes wieder verschwand.

Busemann (Dresden).

Makkavéeff, V. M.: L'influence de la cavitation sur les résistances hydrauliques. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 166—171 (1931).

Eine Rohrleitung mit einer Verengung durch einen Schieber oder sonstige halbgeöffnete Absperrvorrichtung erfährt bei konstantem Anfangsdruck und absinkendem Enddruck eine Steigerung der Durchflußmenge, bis im engsten Querschnitt die Dampfspannung der durchfließenden Flüssigkeit erreicht ist. Diese maximale Durchflußmenge kann nicht mehr überboten werden, auch wenn der Enddruck weiter gesenkt wird. Der überschüssige Druckabfall wird nun entweder durch den mit maximaler Geschwindigkeit längere Rohrstrecken durchlaufenden mit Dampf durchsetzten

Strahl vernichtet oder der Strahl füllt auch den Austrittsquerschnitt des Rohres nicht voll aus. Da bei gewöhnlichen Rohrleitungen erst der Druckverlust berechnet wird und hieraus die Durchflußmenge folgt, paßt Makkavéeff auch den Fall der Kavitation dem hydraulischen Gedankengang an. Es wird eine „Kavitationsverlustzahl“ eingeführt, die so hergeleitet ist, daß bei ihrer Anwendung als Durchflußmenge die maximale Menge folgt. Eine ähnliche Verlustzahl wird auch für Turbinen angegeben.

Busemann (Dresden).

Neumark, S.: *Sur l'écoulement du fluide parfait contournant les corps de révolution avec une pointe effilée.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 172—178 (1931).

Durch Verteilung von Quellen und Senken auf einer Achse und Überlagerung einer Parallelströmung in Richtung dieser Achse kann man die Strömung um Rotationskörper erhalten. Die Annahme diskreter Quellen und Senken (W. J. M. Rankine, Phil. Trans 1864, 791) führt auf vorn und hinten abgerundete Körper. Um zu luftschiffähnlichen, hinten zugespitzten Formen zu gelangen, muß man zu kontinuierlichen Belegungen übergehen. Gegen das Heck zu linear auf Null abnehmende Senkenverteilungen führen auf Körper, die sehr schlank enden (G. Fuhrmann, Göttinger Dissertation 1912). Dennoch erhält man hiermit noch keine spitze oder in einem Doppelpunkt endende Körper. Neumark zeigt nämlich, daß man eine Belegung mit Senken braucht, die am Heck von mehr als 1. Ordnung verschwindet, wenn das Heck in einer Spitze auslaufen soll. Hierbei darf offenbar die Geschwindigkeit der überlagerten Parallelströmung ein gewisses Maß nicht unterschreiten, da man sonst wiederum eine Abrundung des Hecks erhält. Zu den bekannten Stromfunktionen der Strecken konstanter Quelldichte und linear zunehmender Dichte gibt N. explizite auch die Formel für die Stromfunktion im Felde einer Strecke mit parabolisch zunehmender Quelldichte.

Weinig.

Pavlenko, George: *On the theory of gliding. The motion of a plank at a small angle of inclination to the water surface.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 179—183 (1931).

In Anschluß an die Betrachtungen von H. Lamb (Hydrodynamics, 1924, Chapt. IX) wird das Gleiten einer schwach geneigten ebenen unendlich breiten Fläche an der Oberfläche einer reibungslosen Flüssigkeit behandelt. Die Flüssigkeitsbewegung wird als zweidimensional vorausgesetzt (eine horizontale und eine vertikale Dimension); für die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Wellenlänge wird der für große Tiefen gültige Ansatz gemacht. Für den Widerstand R bei gegebenem Neigungswinkel α wird die Näherungsformel $R = \rho v^4 \operatorname{tg}^2 \alpha / 4g$ abgeleitet, die für große Gleitungsgeschwindigkeiten v gilt. Die daraus und aus der Beziehung $\operatorname{tg} \alpha = R/D$ sich ergebenden Folgerungen werden kurz diskutiert.

V. Fock (Leningrad).

Burgers, J. M.: *Über die Anwendung der Oseenschen hydrodynamischen Gleichungen auf das Widerstandsproblem.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 191—197 (1931).

C. W. Oseen hat bekanntlich das Widerstandsproblem für einen Körper, der sich in einer parallelen Grundströmung von der Geschwindigkeit U befindet, mittels der „linearisierten“ Gleichungen behandelt:

$$\rho U \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \Delta u + \operatorname{grad} q = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad (1)$$

unter Streichung der quadratischen Glieder von der Form:

$$\rho(u \times \operatorname{rot} u). \quad (2)$$

Damit wird die Trägheit der Grundströmung, nicht aber die Trägheit der durch den Körper selbst hervorgerufenen Zusatzströmungen berücksichtigt. Als sein Ziel bezeichnet Burgers, in der vorliegenden Note einen Schritt weitergehend, die Glieder (2) näherungsweise mit zu berücksichtigen. Einfacher verständlich ist der Gedankengang

aber in der Form, daß er die Gl. (1) mittels ihrer bekannten Grundlösungen und mittels einer einfachen Belegung der Oberfläche in eine Integralgleichung umformt, in diese auch die Glieder (2) als inhomogene Bestandteile einführt und nun eine schrittweise Lösung versucht. Ausgeführt wird dies für den Fall einer quer zur Strömung stehenden Platte und unter Voraussetzung großer Werte von ϱ/μ bzw. genauer der Reynoldsschen Zahl der Aufgabe. Hierbei bleibt allerdings das nämliche Bedenken bestehen, das auch für die Oseensche Untersuchung in diesem Grenzfall gilt, daß die im ersten Schritt vernachlässigten Glieder (2) in der Nähe des Körpers nicht klein, teilweise sogar groß gegen die Glieder von (1) sind. Der Verf. drückt dies so aus, daß er die Glieder (2) noch mit einem Parameter λ multipliziert denkt, und fragt, ob die zu erwartende Potenzentwicklung nach λ noch für $\lambda = 1$ konvergent bliebe. Eine so weitreichende Konvergenz kann aber aus dem angeführten Grunde wohl nicht erwartet werden. Zum Schlusse wird noch die Integralgleichung durch ein Gleichungssystem mit endlicher Variabelnzahl ersetzt und für dieses verwandte System die Auflösung durchgeführt.

F. Noether (Breslau).

Lindner, Fred V.: Der Formwiderstand einer Platte. (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 198—204 (1931).

Der Zweck der Arbeit ist, die Ergebnisse der Oseenschen asymptotischen Hydrodynamik angenähert darzustellen, und zwar unter bloßer Benützung der Hilfsmittel aus der Theorie der idealen Flüssigkeit. Der Untersuchung liegt die Anschauung zugrunde, daß der Einfluß der Flüssigkeitsreibung nur dort in Erscheinung tritt, wo die Strömung unendliche Geschwindigkeiten aufweist; in erster Linie kommen dafür Kanten in Frage, des weiteren aber auch jene Stellen, an denen sich die Grenzschicht vom Körper ablöst. Es wird nun angenommen, daß die sich an diesen Stellen gleichmäßig bildenden Wirbel in Form von Unstetigkeitsflächen in der Strömung in unveränderter Stärke erhalten bleiben und so ein Kielwasser hinter dem Körper abgrenzen. (Diese Unstetigkeitsflächen bilden eine labile Gleichgewichtsform, die sich in einiger Entfernung vom Körper in Einzelwirbel umbilden, welcher Vorgang indessen von der angenäherten Betrachtung, die der Arbeit zugrunde liegt, ausgeschlossen wird.) Es zeigt sich, daß das so schematisierte Problem sich mit Hilfe einfacher Quell- bzw. Wirbelbelegungen darstellen läßt, und einer graphischen Lösung zugänglich ist. Es wird mit dieser Methode behandelt das zweidimensionale Problem einer ebenen Platte, die senkrecht angeströmt wird, ferner dieselbe Platte mit schräger Anströmung bei großem Anstellwinkel. Es liegt in der Natur der Lösung, daß eine gewisse Willkür in der Wahl der Belegungsintensitäten möglich ist, die eine gute Anpassung an die wirklichen Verhältnisse ermöglicht, so daß eine leidliche Übereinstimmung in bezug auf Widerstandsbeiwerte mit den Meßresultaten, sowie eine recht gute Übereinstimmung mit den Strömungsbildern, die eigens zum Zwecke dieses Vergleichs von Ahlborn hergestellt wurden, sich nachweisen ließ. Zum Schluß werden einige Betrachtungen über das zweidimensionale Problem der Platte mit kleinem Anstellwinkel mitgeteilt und gezeigt, daß eine besonders gute Annäherung an die Wirklichkeit zu erhalten ist durch Überlagerung der von Müller ermittelten Kielwasserströmung mit der Zukovskyströmung.

Neményi (Berlin).

Müller, Wilhelm: Zur Konstruktion von idealen Kielwasserströmungen. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 205 bis 214 (1931).

Die Arbeit enthält wesentliche Fortführungen und Verallgemeinerungen der Lindnerschen Gedanken. Zunächst werden einige neue Resultate für die schräg angeströmte Platte, insbesondere mit kleinem Anstellwinkel, mitgeteilt, sodann erfolgt eine Verallgemeinerung auf ebene Umströmungsprobleme überhaupt, unter besonderer Berücksichtigung des umströmten Kreiszylinders, für welchen unter Mitarbeit von Lindner das vollständige Strömungsbild ermittelt wurde. Weiter wird das achsensymmetrische Problem behandelt, insbesondere die Umströmung der senkrecht angeströmten Kreis-

platte. Überall werden Vergleiche mit den Resultaten der Oseenschen Theorie sowie mit den Versuchs- und Beobachtungsergebnissen mitgeteilt. Eine Bearbeitung der Kugelumströmung wird angekündigt. *Neményi* (Berlin).

Wagner, Herbert: Über den Aufschlag gekielter Flächen auf Wasser. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 215—219 (1931).

Im Hinblick auf das Landungsproblem von Wasserflugzeugen behandelt Wagner das nichtstationäre Problem des Aufschlags eines symmetrisch gekielten Bodens auf eine ursprünglich ebene Wasserfläche unter Vernachlässigung der Wirkungen der Erdbeschleunigung gegenüber den großen dynamischen Beschleunigungen. Im ersten Teil der Arbeit wird der Boden als sehr flach, aber von sonst beliebiger Form vorausgesetzt. Hierfür lassen sich Kraftwirkung und Druckverteilung in geschlossener Form angeben. Beim Stoß wird Energie frei, die sich in seitlich mit hoher Geschwindigkeit abgeschleuderten Spritzern äußert. An der Entstehungsstelle dieser Spritzer treten lokal außerordentlich hohe Drucke auf, die auch durch Nachgiebigkeit des Bodens kaum verringert werden. Im zweiten Teil der Arbeit wird der Aufschlag eines geradlinig gekielten Bodens mit endlichem Kielungswinkel behandelt. Diese Betrachtungen können auch auf die Vorgänge beim Start ausgedehnt werden. *Weinig*.

Kiebel, I.: Conditions de possibilité dynamique du mouvement d'un fluide compressible avec affluence d'énergie donnée. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 276—281 (1931).

Der Zweck der Arbeit ist die Aufstellung der „Bedingungen der dynamischen Bewegungsmöglichkeit“ einer zähen kompressiblen Flüssigkeit, für den allgemeinsten Fall einer „baroklinen“ Bewegung, wo der Druck nicht von der Dichte allein, sondern auch von der raumzeitlich variablen Temperatur abhängt. Die Problemstellung ist eine Verallgemeinerung derjenigen von A. Friedmann und besteht im Folgenden. Die dynamischen Elemente der Bewegung (Geschwindigkeiten, äußere Kräfte) sowie der Energiezufluß pro Volum- und Zeiteinheit werden als gegeben betrachtet. Gefragt wird nach den Bedingungen, welchen die gegebenen Größen genügen müssen, damit man aus den 6 Grundgleichungen (die 3 Bewegungsgleichungen, die Kontinuitäts- und die Zustandsgleichung, sowie die Gleichung, welche die Energiebilanz in der Volumeneinheit ausdrückt) die „thermodynamischen“ Größen (Temperatur, Druck und spezifisches Volumen) bestimmen kann. Die resultierenden Bedingungsgleichungen, die von recht komplizierter Form sind, führen zur Unterscheidung von 13 verschiedenen Bewegungsklassen und werden in einer Tabelle wiedergegeben. *V. Fock* (Leningrad).

Hanocq, Ch.: Vérification expérimentale de la théorie de Reynolds et Sommerfeld sur le frottement „fluide“. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 298—306 (1931).

In den Versuchen über die Reynolds-Sommerfeldsche Lagerreibungstheorie ist bisher das Reibungsmoment entweder am Zapfen oder als Reaktionsmoment am Lager gemessen worden, wobei angenommen wurde, daß diese zwei Momente gleich sind. Verf. bemerkt, daß diese zwei Momente bei Belastung des Zapfens durchaus verschieden sind, weil der Zapfen exzentrisch im Lager sitzt. Mit Hilfe der Sommerfeldschen Formeln wird das Reibungsmoment am Zapfen M , sowie das am Lager M_c berechnet mit dem Resultat, daß $M_c - M = Pa$, wo P die Belastung des Lagers und a die Horizontalprojektion des Abstandes zwischen Zapfen und Lagermittelpunkt ist. Versuche des Verf. bestätigen diese Theorie. Es wird betont, daß die Folgerungen, die aus den klassischen Versuchen von Lasche und Stribeck gezogen sind, zum Teil falsch sind, weil da $M = M_c$ als selbstverständlich angenommen wurde. *Den Hartog*.

Karelitz, G. B.: Notes on the mechanism of bearing lubrication. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 307—317 (1931).

Die Differentialgleichung des Ölfilms in einem zylindrischen Lager von unendlicher

$$\text{Länge} \quad \frac{dp}{dx} = - \frac{6\mu\omega}{m^2} \cdot \frac{(1 - c \cos \vartheta) - c_1}{(1 - c \cos \vartheta)^3},$$

ist numerisch integriert worden für viele Werte der Parameter c und c_1 . Die Ergebnisse sind in graphischer Form aufgetragen worden, so daß die Druckverteilung, Gesamtdruck und Exzentrizität direkt ablesbar sind.

Ferner berichtet die Arbeit über einige rein experimentelle Arbeiten über halbtrockene Schmierung sowie über die Schmierung mittels Ölringen. *Den Hartog* (Göttingen).

Rosenblatt, Alfred: Sur certains mouvements stationnaires des fluides visqueux incompressibles. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 351—354 (1931).

In dieser Arbeit betrachtet der Verf. einige Lösungen der Gleichung:

$$\nu \Delta \Delta \Psi - \frac{D(\Psi, \Delta \Psi)}{D(x, y)} = 0,$$

für die Stokessche Strömungsfunktion, welche die Ergebnisse von Hamel und Oseen verallgemeinern; betreffs der radialen Bewegungen sucht er weiter die näheren Bewegungen derselben, welche sich mittelst einer Reihe, deren absolute Konvergenz geprüft wird, darstellen lassen. *Bossolasco* (Turin).

Rosenblatt, Alfred: Sur les mouvements plans des liquides visqueux voisins des mouvements radiaux. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 920—922 (1931).

Die vorliegende Notiz bildet eine Ergänzung zu einer Veröffentlichung des Verf. (Verhandlungen des 3. Kongresses für technische Mechanik, Stockholm 1930) über die Spiralbewegungen zäher, inkompressibler Flüssigkeiten und über Bewegungen in der Nachbarschaft derselben. Der Verf. gibt noch einen Weg an zur Auflösung der Ausgangsdifferentialgleichung:

$$\nu \Delta \Delta \Psi - 1/r \{ \Psi_r \Delta \Psi_\varphi - \Psi_\varphi \Delta \Psi_r \} = 0.$$

J. J. Sommer (München).

Witoszyński, C., et P. Szymański: Sur une intégrale particulière des équations de Stokes. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 355—357 (1931).

Es handelt sich um eine stationäre Bewegung einer zähen Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr von kreisförmigem Querschnitt: die Verteilung der Geschwindigkeiten ist verschieden von einem Querschnitt zum anderen und es treten auch radiale Komponenten der Geschwindigkeiten auf. Nach Elimination des Druckes p in den Stokes-Gleichungen nehmen die Verff. an, daß die Strömungsfunktion die Form $\psi = \frac{\mu}{\rho} (A + Bz)$ besitze; die Funktionen A und B , von r allein, werden bestimmt durch Integration zweier Differentialgleichungen unter den Grenzbedingungen $V_r = V_z = 0$ für $r = 1$ und $V_r = 0$ für $r = 0$. Man findet, daß in besonderen Fällen (verschieden von Poiseuille-Bewegungen) die einzige Integrationskonstante zur Ergiebigkeit des Rohres proportional ist. Zuletzt wird unter Heranziehung des Druckes eine Beziehung abgeleitet die nur für große Ergiebigkeiten anwendbar ist.

Bossolasco (Turin).

Kaden, H.: Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche. (*Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.*) Ing.-Arch. **2**, 140—168 (1931).

Bei einem Tragflügel von unendlicher Spannweite bildet sich von der Hinterkante ausgehend eine Wirbelschicht aus, die für verschwindend kleine Zähigkeit in eine mathematische Unstetigkeitsfläche ausartet, welche, wenn der induzierte Widerstand des Flügels ein Minimum ist, an allen Stellen gleiche Abwärtsbewegung besitzt, also eben bleibt. Eine solche ebene Wirbelfläche ist nicht stabil, ihre Enden haben das Bestreben, sich einzurollen. Es wird der zeitliche Verlauf des Aufspulens einer solchen Wirbelfläche, insbesondere die Gestalt der entstehenden Spirale, ermittelt. Zur Vereinfachung des Problems wird eine einseitig sich ins Unendliche erstreckende Unstetigkeitsfläche angenommen. Da jetzt keine ausgezeichnete Länge vorhanden ist, muß der Aufwicklungsvorgang von jedem Maßstab unabhängig sein. Die während des Aufspulens entstehenden Strömungsformen sind alle einander ähnlich. Der zeitliche Verlauf ist einfach eine

ähnliche Vergrößerung einer bestimmten Strömungsfigur. Durch eine einfache Ähnlichkeitsbetrachtung läßt sich zeigen, daß sich die Zeiten t_1 und t_2 zu den Maßstäben r_1 und r_2 der ähnlichen Strömungsbilder verhalten wie $(r_1 : r_2)^{\frac{1}{2}}$. Legt man im Anfangszustand die Unstetigkeitsfläche in die x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und ihr freies Ende in den Ursprung, so ist die Verteilung der Zirkulation der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche gegeben durch $\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{\sigma}{\sqrt{x}}$ ($\sigma = \text{Konstante}$). Die durch die Aufwicklung entstehende Spirale hat zur Zeit t in der Umgebung ihres Mittelpunktes (kleine r) in Polarkoordinaten die Gleichung: $r = \left(\frac{kt}{\pi\varphi}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($k = \text{Konstante}$). Durch Berechnung einer zweiten Näherung ergibt sich, daß in dieser Gleichung für größere Entfernungen r vom Mittelpunkt der Exponent $\frac{2}{3}$ durch einen anderen, von φ abhängigen Exponenten ν zu ersetzen ist. Für sehr große r schmiegt sich die Spirale sehr eng an die Asymptotengerade an. Wenn die Trennungsfläche sich nach unten hin aufspült, so sind die Koordinaten des Spulenmittelpunktes M als Funktionen der Zeit gegeben durch die einfachen Gleichungen

$$x(M) = 0,57 \left(\frac{9}{2\pi^2} \sigma t\right)^{\frac{2}{3}}; \quad y(M) = -0,88 \left(\frac{9}{2\pi^2} \sigma t\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Anwendung der Ergebnisse auf die Trennungsfläche hinter einem Tragflügel ergibt, daß bei mittleren Werten von Auftriebsbeiwert und Seitenverhältnis der Aufspulvorgang schon in etwa 2 Spannweiten hinter dem Flügel praktisch beendet ist. Die experimentelle Verfolgung des Aufwicklungsvorganges leidet bisher sehr unter versuchstechnischen Schwierigkeiten. Doch konnte durch Versuche in einem Wasserbassin auf kinematographischem Wege eine größenordnungsmäßige Bestätigung der Theorie gewonnen werden.

H. Schlichting (Göttingen).

Dupont, M. P.: *Théorie du biplan indéfini.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 372—386 (1931).

Verf. behandelt in allgemeiner Form das in Deutschland zuerst von E. Pohlhausen 1919 in seiner Göttinger Dissertation bearbeitete Problem, Auftriebs-, Widerstands- und Momentenbeiwert des unendlichen Doppeldeckers zu bestimmen. Er bildet unter Voraussetzung eines gewissen, in der Praxis nicht unterschrittenen Abstandes der Profile (die Tandemanordnung ist nicht zugelassen!) die Profile auf 2 Kreise ab und behandelt dann das Problem: 2 feste Kreise mit Zirkulation in einer Parallelströmung. Er bestimmt die Zirkulationen um die Kreise und stellt die Formeln zur Berechnung der oben genannten Beiwerte nach Blasius auf. 3 Diagramme zur Ermittlung der für die Transformationen notwendigen Konstanten vervollständigen die Arbeit, deren Verständnis durch unzureichende Erklärung der Bezeichnungen erschwert ist, und die im wesentlichen bei sehr knapper Skizzierung des Verlaufs nur die Resultate der Transformation angibt.

I. Lotz (Göttingen).

Müller, Wilhelm: *Abbildungstheoretische Grundlagen für das Problem des Tragflügels in Erdbodennähe.* Z. angew. Math. u. Mech. 11, 231—236 (1931).

Das Strömungspotential im Außengebiet zweier Kreise ist von Lagally vermöge der Abbildung dieses Gebietes auf ein Rechteck mit Hilfe von elliptischen Funktionen angegeben worden (dieselbe Z. 1929, 299). Damit ist speziell auch das Potential um einen in der Nähe einer festen ebenen Wand befindlichen Zylinder bekannt. Verf. diskutiert eine Abbildungsfunktion $z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta + \zeta_0} + \frac{p^2}{\bar{\zeta} + \bar{\zeta}_0}$, die konjugiert-komplexe

Punkte der ζ -Ebene in konjugiert-komplexe Punkte der z -Ebene übergehen läßt, und durch geeignete Wahl von p und $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ gestattet, die Kreise in den Joukowski'schen Profilen verwandte Formen überzuführen (Tragflügel in Erdbodennähe). Eingehend wird der „symmetrische Fall“ ($\xi_0 = 0$) diskutiert, insbesondere gezeigt, daß für $\eta_0 = b$ und genügend kleine p/a , a/b ($a = \text{Kreisradius}$, $b = \text{Mittelpunktsabstand von der } x\text{-Achse}$) Kurven entstehen, die sich von Ellipsen sehr wenig unterscheiden;

für $p = a$, $\eta_0 \neq b$ entstehen nichtspitze Kreissicheln. Für $\xi_0 \neq 0$ unsymmetrische, z. B. tragflügelähnliche Konturen. *K. Marguerre (Karlsruhe).*

Schmeidler, Werner: Untersuchungen über Flugzeuge mit veränderlichen Flächen. (*Versuchsflugzeugbau, Techn. Hochsch., Breslau.*) *Z. Flugtechn.* **22**, 325—329 (1931).

Anlaß, die Auftriebsverteilung eines Tragflügels mit unstetig veränderlicher Tiefe zu berechnen, gab der Bau eines Flugzeuges, aus dessen oberer Tragfläche eine Hilfsfläche herausgeschoben werden kann, wodurch die Fläche vergrößert und die Wölbung gesteigert, das Profil also für Start und Landung günstig verändert wird. Der Verf. legt seinen Rechnungen die Prandtl'sche Theorie der tragenden Linie zugrunde, ohne die Zulässigkeit ihrer Anwendung für diesen Fall zu diskutieren. An den Stellen unstetiger Tiefenänderung gehen Wirbelbänder ab, die eine Unstetigkeit auch der Zirkulation verursachen. Bei der Anwendung des Kutta'schen Satzes über den Zusammenhang von Zirkulation und Anstellwinkel wird darauf geachtet, daß für das Mittelstück, das erhebliche Anstellwinkel haben kann, der Ersatz des sin durch den Bogen nicht statthaft ist. Im übrigen wird die Zirkulation mit Hilfe von trigonometrischen Polynomen im Anschluß an Glauert bestimmt. Eine Abbildung zeigt die Auftriebsverteilung und die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit und die zur Kontrolle der Rechnung mit Hilfe der gefundenen Zirkulationsverteilung errechnete Tiefe.

I. Lotz (Göttingen).

Bryant, L. W., and D. H. Williams: The application of the method of operators to the calculation of the disturbed motion of an aeroplane. *Rep. aeronaut. Res. Comm. Nr 1346*, 1—13 (1931).

In the study of low speed control and spinning extensive use is being made of the operational method of solving systems of linear differential equations with constant coefficients. Such equations are obtained by using average values of the various resistance coefficients, treating them as constants for a short interval of time. Each variable is found to satisfy an equation of type $F(D)u = U$, where $D = d/dt$ and U depends on the values of the variables at time $t = 0$ and on the applied forces and couples, which are functions of t . The case in which the algebraic equation $F(x) = 0$ has repeated roots is given special consideration. Formulas are given for the calculation of (1) the lateral motion, (2) the longitudinal motion of an aeroplane following a disturbance from flight along a rectilinear path.

Bateman (Pasadena).

● **Frazer, R. A., and W. J. Duncan: The flutter of monoplanes, biplanes and tail units.** (A sequel to R. & M. 1155.) (*Rep. aeronaut. Res. Comm. Nr. 1255.*) London: His Majesty's stationery office 1931. VIII, 179 S. u. 41 Abb. geb. 7/6.

Kawada, Sandi: A contribution to the theory of latticed wing. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* **1**, 393—402 (1931).

Zwecks Ermittlung des komplexen Geschwindigkeitspotentials der zweidimensionalen zirkulationslosen Ausweichströmung um eine gradlinige, beiderseits unbegrenzt fortgesetzte Flügelreihe mit Streckenprofil in der Z-Ebene wird das Potential

$$f(z) = \frac{V k}{2\pi} \cdot \left\{ e^{i(\alpha+\beta)} \ln \frac{z - ma}{z + ma} + e^{-i(\alpha+\beta)} \ln \frac{mz - a}{mz + a} \right\}$$

der Z-Ebene, das einer Umströmung des Kreises $z = a \cdot e^{i\theta}$ bei Vorhandensein einer Quelle bzw. Senke sowie je eines Wirbels (mit zueinander entgegengesetztem Drehungssinn) in $z_1 = a/m$ bzw. $z_2 = -a/m$ mit $0 < m \leq 1$ entspricht, durch die Funktion

$$\zeta = \frac{k}{2\pi} \cdot \left\{ e^{i\beta} \ln \frac{z - ma}{z + ma} + e^{-i\beta} \ln \frac{mz - a}{mz + a} \right\}$$

in die Z-Ebene übertragen; dabei bedeutet k den Abstand zweier Flügel, β die Neigung der Gitterachse gegen die positive Richtung der imaginären Achse, $V \cdot e^{i\alpha}$ die Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, und m wird durch die Wahl von k und der Profiltiefe festgelegt. Überlagerung einer Zirkulationsströmung von der Form

$$f_1(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z + ma}{z + a/m},$$

Bestimmung der Zirkulationskonstanten Γ durch die Joukowskische Bedingung glatter Umströmung der hinteren Flügelkante und Anwendung der Blasius'schen Formel liefert als Verallgemeinerung des Kutta-Joukowskischen Satzes das folgende Theorem:

Auf jedes Glied der Flügelreihe wirkt eine Gesamtluftkraft, deren Größe durch das Produkt aus Luftdichte, Zirkulationskonstante und den Betrag des Vektors

$$v_{\xi} - i v_{\eta} = V \cdot e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2k} e^{i\beta}$$

gegeben ist, während ihre Richtung auf derjenigen von $v_{\xi} - i v_{\eta}$ senkrecht steht. Dabei mißt $\frac{i\Gamma}{k} e^{i\beta}$ die durch die Zirkulationsströmung in unbegrenzter Entfernung hinter der Flügelreihe bedingte Geschwindigkeit; vor dem Gitter dagegen geht der Geschwindigkeitsbeitrag dieser Teilströmung mit unbegrenzt wachsender Entfernung gegen Null. Zerlegung der resultierenden Luftkraft in Widerstands- und Auftriebskomponente liefert

$$W = \frac{\rho \Gamma^2}{2k} \cos(\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad A = \rho V \Gamma - \frac{\rho \Gamma^2}{2k} \sin(\alpha + \beta).$$

Harry Schmidt (Köthen).

Weinig, Fritz: Der Hodograph der Gitterströmung als Weg zur Ermittlung günstiger Turbinen- und Propellerprofile. (*Inst. f. Techn. Strömungsforsch., Techn. Hochsch., Berlin.*) (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 437—448 (1931).

Eine ebene Potentialströmung mit der komplexen Strömungsfunktion $F = F(z)$ geht durch konforme Abbildung mit der Funktion $\zeta(z) = dF/dz$ in ihre „Hodographenströmung“ über. Einer starren Begrenzung der Strömung entspricht als „Hodograph“ eine geschlossene Kurve, aus deren Gestalt die Geschwindigkeitsverteilung an der Begrenzung beurteilt werden kann. Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die zu einem sinnvoll gegebenen Hodographen möglichen Formen von Gitterströmungen aufzusuchen, und spricht in diesem Sinne von „Gitterströmungen mit vorgeschriebener Geschwindigkeitsverteilung“. Die Fragestellung führt auf ein Randwertproblem der Potentialtheorie für die gegebene Hodographenkontur. Eine Folge elementarer konformer Abbildungen führt den Hodographen in ein kreisähnliches Gebilde über, und die numerische Lösung einer Integralgleichung stellt die Abbildung des kreisähnlichen Bereiches auf das Äußere eines Kreises her, für den das Randwertproblem durch Spiegelung der Singularitäten erledigt werden kann. Ort und Intensität der Singularitäten (Wirbelquelle + Wirbelsenke) legen die Zuströmungsverhältnisse der Gitterströmung und die geometrischen Abmessungen der Gitterstäbe fest. Die Form des zu gegebener (jedoch nicht ganz willkürlicher) Singularitätenanordnung gehörigen Gitterwerks folgt aus gewöhnlichen Quadraturen. Das Verfahren soll zur Ermittlung besonders günstiger Turbinen- und Propellerflügel dienen. E. Weinel (Göttingen).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Noether, F.: Anwendung der Hillschen Differentialgleichung auf die Wellenfortpflanzung in elektrischen oder akustischen Kettenleitern. (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 143—149 (1931).

Die eingeschwungenen Zustände in solchen elektrischen oder akustischen Wellenfiltern, welche abwechselnd aus kontinuierlichen Abschnitten und in regelmäßigen Abständen eingeschalteten konzentrierten Längsreaktanzen und Querableitungen bestehen, sind bisher stets in der Weise untersucht worden, daß man von der Vorstellung von hin- und rücklaufenden Wellen in jedem kontinuierlichen Abschnitt ausging; die Amplituden derselben nehmen dann beim Übergang zum nächsten Abschnitt einen gewissen komplexen Übertragungsfaktor an, der nur von der Frequenz abhängt, so daß man auch im ganzen System das Phänomen einer fort- bzw. rückschreitenden Welle hat. In dieser Arbeit wird unter Vermeidung der von vornherein vorausgesetzten Vorstellung der in jedem Abschnitt hin- und herlaufenden Wellen die Erscheinung der im Gesamtsystem fortschreitenden Welle unmittelbar aus dem mathematischen Ansatz hergeleitet. Hierzu werden die konzentrierten Impedanzen

bzw. Leitwerte allgemein durch irgendwelche kontinuierliche Verteilungen mit bestimmter Periode l ersetzt, die der Abschnittslänge entspricht. Die linearen Differentialgleichungen des Systems haben dann keine konstanten Koeffizienten mehr, sondern periodisch veränderliche, lassen sich also in der Form schreiben:

$$\frac{dJ}{dx} = -i \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{(n)}a_n e^{inz} \right) \cdot P; \quad \frac{dP}{dx} = -i \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{(n)}b_n e^{inz} \right) \cdot J; \quad z = \frac{\pi x}{l}; \quad (1)$$

J und P bedeuten im elektrischen Fall Strom und Spannung, im akustischen Mediumstrom und Druck. Das Gleichungssystem (1) stellt eine Verallgemeinerung der Hillschen Differentialgleichung:

$$\frac{dP}{dx} + \varphi(x) \cdot P = 0 \quad \varphi(x) = \text{periodische Funktion} \quad (2)$$

dar. Da jedes partikuläre Integralsystem einer solchen bei Vermehrung von x um eine Periode wieder eine Lösung, also eine lineare Kombination von solchen ergibt, gibt es Lösungen, die beim Übergang nur einen konstanten Faktor annehmen; diese Integrale sind hier am geeignetsten zur Lösung, da sie physikalisch die Bedeutung einer fort- bzw. rückschreitenden Welle haben, die jetzt ohne Hilfsvorstellungen aus dem mathematischen Ansatz gewonnen ist. Bei der Anwendung der Gleichung (2) auf Kettenleiter artet die Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ wegen der Konzentration der Impedanzen zu einer periodischen „Zackenfunktion“ $s(x)$ aus; daraus ergibt sich eine gewisse Konvergenzschwierigkeit, da in der Hillschen Theorie absolute Konvergenz der Fourier-Reihe für $\varphi(x)$ vorausgesetzt wird, doch kann diese durch einen Kunstgriff umgangen werden. Setzt man dann in (2) die gesuchte Partikularlösung in der Form

$$p(z) = e^{i\eta z} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{(n)}p_n e^{inz} \quad [p_{+n} = p_{-n}]$$

ein, so ergibt sich ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen, deren Determinante, die Hillsche Determinante, gleich 0 gesetzt, als Bestimmungsgleichung für den Übertragungsfaktor η auftritt. Man kann diese durch Partialbruchdarstellung lösen und erhält dieselbe Gleichung für η wie aus der früheren Theorie, ferner die p_n , welche sich als Fourier-Koeffizienten der periodisch fortgesetzten Funktion $e^{-i\eta z} \cos\left(\frac{2lz}{\lambda} + \varphi\right)$ ergeben, der gleichen, zu der auch die frühere einfache Voraussetzung der in jedem Abschnitt hin- und rücklaufenden Welle führt. — Zu der einfacheren Gleichung (2) führen Kettenleiter mit periodisch eingeschalteten Längs- oder Querimpedanzen; sind beide vorhanden, so kommt man auf das simultane Gleichungssystem (1), das in analoger Weise mittels der Ansätze

$$P = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{(n)}p_n e^{inz}, \quad J = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{(n)}q_n e^{inz}$$

auf 2 Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen führt, welche in ähnlicher Weise wie vorher gelöst werden können. Das asymptotische Verhalten der Fourier-Koeffizienten p_n , q_n entspricht hierbei der Unstetigkeit des Stromes an der Querableitung bzw. der Spannung an der Längsimpedanz. Durch Einsetzen in die Gleichungssysteme gewinnt man die der verallgemeinerten Hillschen Differentialgleichung entsprechende transzendente Bestimmungsgleichung für η , deren Diskussion in bekannter Weise die Lage der unendlich vielen Sperr- und Durchlaßbereiche ergibt. *Baerwald*.

Baerwald, H. G.: Ein allgemeiner Satz über den Zusammenhang zwischen Eigenfrequenzen und Gruppenlaufzeit in linearen verlustfreien Dispersionssystemen. (*Heinrich Hertz-Inst. f. Schwingungsforsch., Berlin.*) Elektr. Nachr. Techn. 8, 224—227 (1931).

Unter Dispersionssystemen werden lange elektrische Leitungen oder Kettenleiter mit vielen gleichen symmetrischen Vierpolen als Gliedern oder analoge akustische

oder optische Systeme verstanden. Mit der Methode der Sattelpunkte gewonnene Formeln für Gruppenlaufzeit und Aufschaukelzeit aus Ann. Physik (5) 6, 295 (1930); 7, 731 (1930); (vgl. dies. Zbl. 1, 369) werden angeführt. Es wird der Satz abgeleitet und physikalisch veranschaulicht: Die asymptotische Dichte der Eigenfrequenzen eines linearen Systems ist gleich seiner Gruppenlaufzeit pro Längeneinheit bzw. pro Glied.

Cauer (Göttingen).

Pol, Balth. van der: Electrical and mechanical oscillations the period of which is proportional to a time constant (relaxation oscillations). (Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 178—180 (1931).

Auf dem Gebiete der Erzeugung stationärer Schwingungen haben neben den lange bekannten sinusförmigen Schwingungen in letzter Zeit die sog. Relaxationsschwingungen eine steigende Bedeutung erlangt, da man ihnen auf elektrischem, akustischem, mechanischem, aber auch biologischem Gebiet vielfach begegnet. Sie sind dadurch charakterisiert, daß ihre Periode nicht durch das Zusammenwirken von trägen und elastischen (bzw. magnetischen und elektrischen) Energiespeichern bestimmt wird, sondern durch Zeitkonstanten — Relaxationszeiten — aperiodischer Systeme. Sie treten auf, wenn eine Energiequelle mittels einer relaisartig wirkenden Vorrichtung, die eine fallende Charakteristik besitzt, so gesteuert wird, daß sich die aperiodischen Vorgänge dauernd wiederholen, indem nach jedesmaligem Ablauf eines solchen das System instabil wird und umschlägt, weshalb diese Schwingungen auch als „Kippschwingungen“ bezeichnet werden. Im Gegensatz zu den sinusförmigen Schwingungen hängt ihre Periode, entsprechend dem aperiodischen Verlauf, auch von der Amplitude ab. Beispiele für Relaxationsschwingungen sind der hydraulische Widder, die Äolusharfe, der intermittierende Geyser, das Schnarchen, der Multivibrator. — Da die stationären Schwingungen von einer zeitlich konstanten Energiequelle geliefert werden, ist es klar, daß ihre Theorie durch nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben wird. Man wird dabei allgemein auf Gleichungen der Form

$$y'' + f(y) \cdot y' + \omega^2 y = 0 \quad (1)$$

geführt; die für die Relaiswirkung des Systems maßgebliche Charakteristik $f(y)$ läßt sich in vielen Fällen durch eine quadratische Funktion

$$f(y) = -\alpha + \beta y + \gamma y^2; \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad (2)$$

annähern. Eine einfache Transformation liefert dann die Grundform

$$v'' - \varepsilon(1 - \eta v - v^2) \cdot v' + v = 0; \quad \varepsilon > 0; \quad (3)$$

bei Beschränkung auf symmetrische Schwingungen verschwindet η :

$$v'' - \varepsilon(1 - v^2) \cdot v' + v = 0. \quad (4)$$

Im Falle $\varepsilon \ll 1$ erhält man als Näherungslösung

$$v(\tau) = \frac{2}{\sqrt{1 + C e^{-\varepsilon \tau}}} \sin(\tau + \varphi), \quad (5)$$

was eine sich zu einer stationären Amplitude aufschaukelnde Sinusschwingung darstellt. Ist dagegen $\varepsilon \gg 1$, so erhält man ebenfalls eine schließlich periodische Lösung, die aber sehr rasch ihrer Endamplitude zustrebt, von der Sinusform stark abweicht und aperiodische Gestalt hat, und deren Periode nicht mehr durch 2π gegeben ist, sondern zur Relaxationszeit ε proportional ist, also eine typische Relaxationsschwingung. Man erhält sie aus (4) nach Einführung von $v' = y$ durch 2malige Anwendung der Isoklynenmethode. Sie stellt einen Spezialfall der allgemeinen Poincaréschen Theorie der „cycles limites“ nichtlinearer Differentialgleichungen dar; jedes Integral einer Gleichung der Form (3) geht in eine solche cycle limite über. — In der Nähe der Kippstellen, wo das System instabil wird, läßt es sich schon durch sehr kleine äußere Kräfte beeinflussen; sind diese periodisch und von ähnlicher Frequenz wie die Kippschwingung, so wird dieselbe von ihnen synchronisiert, aber ebenso dann, wenn deren Frequenz

ein ganzzahliges Vielfaches der Relaxationsschwingung ist, womit das Problem der Frequenzmultiplikation gelöst wird. Wann eine solche „Mitnahme“ eintritt, kann durch Einführung einer periodischen Störungsfunktion in die Schwingungsgleichung untersucht werden: gehen die Integralkurven in cycles limites über, so bedeutet das periodische Lösungen, andernfalls erhält man „Schwebungslösungen“: beide Schwingungen bleiben dann selbständig. Ähnliche Wirkung wie äußere periodische Kräfte hat ein schwach gedämpftes Resonanzsystem, mit dem das Relaxationssystem eng gekoppelt wird, indem jenes der Anordnung seine Eigenfrequenz aufdrückt. Fast alle Erzeuger von Sinusschwingungen sind in dieser Weise als Kombinationen eines Relaxationssystems zur Aufrechterhaltung mit einem Resonanzsystem zur Steuerung der Schwingungen aufzufassen: die Kopplung mit dem Resonanzteil führt zu einer kleinen (negativen) Dämpfung bei $y = 0$ oder $\varepsilon \ll 1$ in Gleichung (3), (4), d. h. zu (5). Beispiele für derartige Schwingungssysteme sind auf akustischem Gebiet die Streich- und Blasinstrumente, bei denen auch der Effekt der Frequenzmultiplikation auftreten kann, das Element mit der fallenden Charakteristik ist hier die nichtlineare Coulombsche Reibung bzw. die Wirbelstraßenbildung; auf elektrischem Gebiet die Röhren- und Bogensender; auf mechanischem Gebiet die Kombination der Kolbenmaschine mit Schwungrad.

Baerwald (Berlin).

Hartree, D. R.: Optical and equivalent paths in a stratified medium, treated from a wave standpoint. Proc. roy. Soc. Lond. A **131**, 428–450 (1931).

Der Zweck der Arbeit ist eine wellentheoretische Behandlung der Reflexion elektromagnetischer Wellen an der Heaviside-Schicht und deren Vergleich mit der strahlenoptischen Behandlung (Appleton). Es wird bemerkt, daß die erstere für die Beschreibung gewisser Züge der Reflexion wesentlich ist; andererseits läßt sich auch die letztere in vielen Fällen wellentheoretisch begründen. Strahlenoptisch werden die optische und die äquivalente Weglänge als $P = c \int ds/V$ bzw. als $P' = c \int ds/U$ (V = Phasen-, U = Gruppengeschwindigkeit) definiert. Verf. definiert wellentheoretisch P als φ/k und P' als $\partial \varphi / \partial k$, wo $k = 2\pi/\lambda_0$ und φ eine gewisse Phasendifferenz bezeichnet. Für den Fall eines geschichteten Mediums werden P und P' allgemein durch die Lösung einer aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleiteten Differentialgleichung (vgl. dies. Zbl. **1**, 87) ausgedrückt, und zwar sowohl für senkrechte als auch für schiefe Inzidenz. Der Fall eines langsam veränderlichen Brechungsindex μ wird allgemein betrachtet; es erweist sich, daß der strahlenoptische Ausdruck für P' eine gute Näherung für den wellenoptischen darstellt, falls gewisse Ungleichungen erfüllt sind, welche die „langsame Veränderlichkeit“ von μ näher präzisieren. Für senkrechte Inzidenz werden mehrere Beispiele exakt gelöst, wobei μ^2 als eine stufenförmige, eine lineare und eine quadratische Funktion der Höhe z angenommen wird.

V. Fock (Leningrad).

Elias, G. J.: Reflection of electromagnetic waves at ionized media with variable conductivity and dielectric constant. Proc. Inst. Radioeng. **19**, 891–907 (1931).

Verf. untersucht die Reflexion elektromagnetischer Wellen in den ionisierten Schichten der Atmosphäre, unter der Annahme, daß die Leitfähigkeit g und die Dielektrizitätskonstante ε mit der Höhe h nach dem Gesetz

$$g = g_0 e^{kh} = \frac{\omega}{4\pi} e^{kz}; \quad \varepsilon = 1 - \eta e^{kz}; \quad (z = h + \text{konst.}) \quad (1)$$

variieren. Für die horizontale Komponente des elektrischen Feldes wird der Ansatz

$$E = H_\alpha^{(1)}(w) e^{-i\omega y \sin \varphi/c} \quad (2)$$

gemacht, wo $w = p \sqrt{1 + \eta^2 e^{kz/2}} e^{i(\pi + \beta)/2}$; $\alpha = ip \cos \varphi$, $p = 2\omega/c k$; $\text{ctg } \beta = \eta$ gesetzt ist und $H_\alpha^{(1)}$ die Hankelsche Funktion bezeichnet (vgl. dies. Zbl. **1**, 88). Andererseits wird die Anzahl n_1 der Ionen pro Kubikzentimeter durch die Formel $n_1 = c_1 \exp. (-c_2 e^{-\alpha_1 h})$ approximiert und daraus g und ε als Funktionen der Höhe h abgeleitet. Diese Ausdrücke fallen zwar nicht mit (1) zusammen, können jedoch für eine gewisse Höhe $h = h'$ durch (1) ersetzt werden. Mit Hilfe der gewonnenen Formeln wird für kurze und für

lange Wellen die Höhe bestimmt, wo die Reflexion hauptsächlich stattfindet; es ergeben sich Werte von 65—80 km. Die Rechnungen bezogen sich auf den Fall einer reinen Stickstoffatmosphäre; falls dagegen in den oberen Schichten Wasserstoff in größeren Mengen vorhanden ist, wird die Höhe der maximalen Ionisierung beträchtlich größer. Ferner wird die Amplitude der reflektierten Welle und die für die Reflexion des Signals nötige Zeit diskutiert. Für die Amplitude ergibt sich eine vernünftige Größenordnung, während die Zeit sehr viel kürzer als die beobachtete Echozeit ausfällt. *V. Fock* (Leningrad).

Edes, N. H.: The multiple refraction and reflection of short waves. Proc. Inst. Radio Eng. **19**, 1024—1033 (1931).

This paper discusses the consequences of propagation of short waves around the earth by a series of refractions in the atmosphere and reflections at the earth's surface. A graphical method is given for finding the best wave-length to use for any required range, assuming that the "range/best wave-length" characteristic is known for one "hop"; particular attention is given to the case of a linear characteristic. *Taylor*.

Bonvicini, D.: Su alcuni teoremi fondamentali dell'elettrodinamica e della statica dei solidi elastici. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 594 (1931).

Als Zusatz zu einer Arbeit gleichen Titels in Bd. 11 (1930) derselben Zeitschrift enthält die Note drei weitere Übertragungen von Sätzen aus der Theorie des elastischen Körpers auf die Elektrodynamik. *R. Iglisch* (Aachen).

Bödefeld, Th.: Streuungsrechnung und Feldbild in der Elektrotechnik. Elektrotechn. Z. **1931 I**, 763—768.

Die Arbeit stellt eine übersichtliche, aber doch persönliche Auseinandersetzung mit dem Problem der Streuung (des elektromagnetischen Induktionsverlustes in transformatorischen Anordnungen) dar, das in letzter Zeit in der elektrotechnischen Literatur wiederholt behandelt wurde. In der Definition der Streuung unterscheidet der Autor „magnetische“ Streuung, die bei linearen Leitern auftritt und „induktive“ Streuung, welche erst im Falle körperlicher Leiter hereinspielt und die Ungleichheit der Flußverkettungen zum Ausdruck bringen soll. In Anwendungen werden die mathematischen Formen abgeleitet, wobei allerdings im Falle der Drehfeldmaschinen ein magnetischer Vergleichsfluß herangezogen wird, so daß neue Bezugsfaktoren, diewicklungsfaktoren, zu den Windungszahlen treten, welche natürlich vollkommen willkürlich sind. Endlich wird die in der Elektrotechnik übliche Methode der Gegen-schaltung zur Messung der Streuung kritisch untersucht. *E. Weber* (Brooklyn).

Klassische Optik.

● The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton. Vol. 1. Geometrical optics. Edit. by A. W. Conway and J. L. Synge. (Cunningham mem. Nr 13.) Cambridge University press 1931. XXVIII, 534 S. 50/—.

Die Werke W. R. Hamiltons, deren erster Band, Geometrische Optik, soeben erschienen ist, bieten auch für den Kenner viel Neues dadurch, daß eine ganze Anzahl von Arbeiten zum erstenmal aus dem Manuskript veröffentlicht wurden. Es ist wegen des hier zur Verfügung stehenden Raumes nicht möglich, eine ausführlichere Inhaltsangabe zu geben. Folgende Bemerkungen wollen nur auf die Wichtigkeit dieser für die geometrische Optik wie für die differentielle Liniengeometrie grundlegenden Arbeiten hinweisen. Hamilton behandelt die geometrische Optik als Teil der Variationsrechnung. Auf den von einem Punkt ausgehenden Strahlen trägt er den Lichtweg

$V(xyz) = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} n ds$ ab. Aus dem Fermatschen Prinzip folgen Beziehungen für V , mit deren Hilfe die allgemeinsten Abbildungsgesetze der geometrischen Optik bis zur dritten Ordnung hergeleitet werden. Da ein konzentrisches Bündel in ein beliebiges Normalenbündel verwandelt werden kann, erhält er so auch die Gesetze bis zur dritten Ordnung im allgemeinen Normalenbündel. Seine Untersuchungen dehnt Hamilton

bald auf inhomogene Mittel (krummlinige Lichtstrahlen), schließlich auch auf anisotrope Mittel, auf Kristalle aus. Er findet hier u. a. die Gesetze der konischen Refraktion. Von besonderem Wert für die Optik sind seine Untersuchungen über die Umgebung eines Bildpunktes. Kleinere Arbeiten beschäftigen sich mit der Anwendung seiner Untersuchungen auf spezielle Linsen und Prismensysteme, für die die charakteristische Funktion V oder eine der aus ihr durch teilweise Legendretransformationen entstehenden Funktionen W , T in Reihen entwickelt und die Koeffizienten der ersten Glieder berechnet werden. Von besonderem Wert ist noch die Arbeit „On some results of the Vier of a Characteristic Function in Optics“, in der Hamilton eine große Anzahl von Ergebnissen unveröffentlichter Untersuchungen über die Abbildung in Rotationssystemen, allerdings ohne Ableitung bringt. Ein Teil dieser Ergebnisse ist inzwischen von A. Gullstrand neu entdeckt worden, der größere Teil harrt noch des Beweises. Die Einführung und die ergänzenden Bemerkungen der Autoren tragen sehr zum Verständnis der Arbeiten und zu ihrer Einordnung in den gegenwärtigen Stand der geometrischen Optik bei.

M. Herzberger (Jena).

Herzberger, M.: Über Anwendung der Grundgesetze der geometrischen Optik auf andere Variationsprobleme der Physik. (13. Tag. d. Gauver. Thüringen-Sachsen-Schlesien d. Dtsch. Phys. Ges., Jena, Sitzg. v. 31. 5.—1. 6. 1931.) Physik. Z. **32**, 551—553 (1931).

Der Verf. zeigt, daß das von ihm früher angegebene allgemeine Gesetz der geometrischen Optik $dE = n' da' - n da$ auch für viele andere Einzelprobleme der allgemeinen Physik brauchbar ist und wichtige Folgerungen zuläßt. So lassen sich z. B. die Weierstraß-Knesersche Feldtheorie, das Hilbertsche Unabhängigkeitsintegral, die Enveloppensätze von Kneser, die Abbildungssätze von Carathéodory und anderes aus jener Formel ableiten. Verf. führt noch weitere Einzelfälle an, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Der Beweis geht aus von der Variationsgleichung

$$\delta E = \delta \int H(q_i, q'_i, t) dt = 0,$$

die aussagt, daß bei jeder Zustandsänderung die Energie E konstant bleibt; so ergibt sich durch Einführung eines neuen Parameters τ die bekannte Gleichung $\delta E = \delta \int L d\tau$, wo $L(q_i, \dot{q}_i) = \dot{q}_{i+1} H$ ist. Sind nun a und a' , $a + da$ und $a' + da'$ zwei Paare von Nachbarpunkten, so gilt für diese das oben angegebene allgemeine Gesetz, wenn noch der Vektor n mit den Koordinaten $\delta L / \delta \dot{q}_i$ eingeführt wird. Gehen die Extremalen durch einen Punkt, so folgt aus der angegebenen Gleichung $n' da' = 0$, wenn man von diesem Punkte konstante Werte von E abträgt. — In einem Kneser-Hilbertschen Feld ergibt sich das Hilbertsche Unabhängigkeitsintegral $\int_1^2 n da = E_2 - E_1$. — Es folgen weitere Gesetze.

Picht (Neubabelsberg).

Herzberger, M.: Abbildungslehre, geometrisch-optische. Sonderdruck aus: Handwörterbuch Naturwiss. **1**, 9—20 (1931).

Die allgemeinen Gesetze der geometrischen Optik von Standpunkt des Fermatschen Prinzips und der Theorie des Eikonals. Die Gesetze 1. Ordnung für rotationsymmetrische und nicht rotationsymmetrische optische Systeme. Die Seidelschen Bildfehler. Endliche Öffnung oder endliches Gesichtsfeld bei rotationsymmetrischen Systemen und die Abbesche Lehre von der Strahlenbegrenzung. Es sind die Gesetze und Definitionen in ihren logischen Zusammenhängen gegeben, aber ohne ausführliche Beweise. Die Ergebnisse der Forschungen der letzten Jahre sind stets berücksichtigt.

M. Leontowitsch (Moskau).

Pritschow, Karl: Die graphische Darstellung der Linsenformel. Z.-Ztg. Opt. u. Mech. **52**, 149—152 (1931).

Zunächst werden die einfachen Aufgaben der Abbildung im Gaussischen Raum mit Hilfe des Listingischen Zeichenverfahrens behandelt, sodann die Ermittlung der Brennweite auf einem anderen Zeichenweg durchgeführt, wenn Ding- und Bildweite gegeben sind und schließlich die als Sampsonisches Vorgehen bekannte Zeichenweise

kurz erklärt. An das letzte knüpft Pritschow einen Hinweis auf die Brennweitenbestimmung aus den Brennpunktsabständen von Ding und Bild. *Erggelet* (Jena).

Masius, Morton, and W. E. Lawton: On the indices of refraction of liquids. (*Worcester Polytechn. Inst., Worcester, Massachusetts.*) *J. Opt. Soc. Amer.* **21**, 232—239 (1931).

Die Verff. haben in einer früheren, 1930 in der nämlichen Zeitschrift erschienenen Arbeit untersucht, wie man das Verfahren des Minimums der Ablenkung anwenden muß, wenn das Brechungsverhältnis einer Flüssigkeit mittels eines Hohlprismas bestimmt werden soll. Die bekannte Formel

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - \delta)}{\sin \frac{1}{2} A}$$

(A Prismenwinkel, δ Minimalablenkung) erhält eine Anzahl Verbesserungsglieder, in denen noch das Brechungsverhältnis des Prismenglases und zwei der Winkel vorkommen, die dadurch entstehen, daß die Glasdecken keine genauen Platten, sondern schwache Keile sind. In der neuen Arbeit wird der Vorschlag gemacht, das Hohlprisma möglichst gleichseitig zu machen und an allen drei Kanten die Minimalablenkungen zu messen. Ist der Durchschnittswert der drei Messungen $\bar{\delta}$, so gilt die Näherungsformel:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(60^\circ - \bar{\delta})}{\sin \frac{1}{2} \cdot 60^\circ} = 2 \sin \frac{1}{2}(60^\circ - \bar{\delta}).$$

Es kommen in den Zusatzgliedern die drei Keilwinkel im Glase, dessen Brechungsverhältnis, sowie die Abweichungen der Prismenwinkel von 60° vor, doch sind die Glieder in den Winkeln von 2. Ordnung. Die Verff. stellen fest, daß man die Näherungsformel jedenfalls anwenden kann, wenn die Winkel kleiner als $10'$ sind. Im zweiten Teile wird der Fall untersucht, daß die Brechungsverhältnisse zweier Bezugsflüssigkeiten n, n' bekannt, das einer dritten (N) zu bestimmen ist. Hier genügen die Messungen der Minimalablenkungen an einer Kante (δ, δ', D). Die Endformel lautet:

$$N \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta) = n \sin \frac{1}{2}(\delta' - D) + n' \sin \frac{1}{2}(D - \delta);$$

es fallen also der Prismenwinkel A und die Winkel der Glaskeile heraus, oder vielmehr sie kommen nur in Zusatzgliedern vor, die man im allgemeinen vernachlässigen kann. Den Vorteil hat man nicht, wenn man nur eine Bezugsflüssigkeit benutzt. *H. Boegehold* (Jena).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Press, A.: Thermodynamische Studien. *Z. Physik* **69**, 483—494 (1931).

Im 1. Teil der Arbeit wird eine „universelle Zustandsgleichung“ $p v = (\gamma - 1)(E - V)$ aufgestellt. Hier ist $\gamma = C_p/R - 1$, E die innere Energie, $V = \vartheta v + (\gamma - 1) \int \vartheta \cdot dv$. V stellt eine Kohäsionsenergie dar, ϑ nähert sich dem van der Waalsschen Wert a/v^2 . Aus dieser Gleichung läßt sich mit der einzigen Annahme, daß für die Energiegleichung $dQ = dE + p dv$ ein integrierender Faktor $\mu = 1/t$ existiert, folgende Zustandsgleichung für einfache Körper ableiten:

$$(p + \vartheta) v = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 1} \cdot \bar{\varphi}(t v^{\gamma-1}).$$

Im 2. Teil wird gezeigt, daß man die Anwendung der Gibbsschen Wärmediagramme (Entropie und Temperatur als Koordinaten) dadurch erweitern kann, daß man in der Gleichung des 2. Hauptsatzes $\int \mu dQ = \int \mu(dE + p dv)$ an Stelle von $\mu = 1/t$ allgemeinere μ -Werte und demnach an Stelle der Entropie $s = \int \mu dQ$ allgemeinere Entropiefunktionen Φ einführt. So werden z. B. für den Ottoschen und den Jouleschen Kreisprozeß praktische Darstellungen gewonnen. *H. Ulich* (Rostock).

Huang, Tzu Ching: The general equations of energy and entropy of gases. (*Dep. of Chem., Nat. Tsing Hua Univ., Peiping.*) *Physic. Rev.*, II. s. **37**, 1171—1174 (1931).

Unter Verwendung einer allgemeinen, von Beattie und Bridgeman [*Proc. Am. Acad. Arts Sci.* **63**, 231 (1928)] angegebenen Zustandsgleichung für Gase:

$$p = T \cdot \Psi(v) - \Phi(v) - F(v, T),$$

werden Formeln für die innere Energie und die Entropie von Gasen abgeleitet. Diese enthalten die Ausdrücke, die bei Anwendung der idealen, der van der Waalsschen, der Clausiusschen und der Dietericischen Gasgleichung gelten, als Spezialfälle.

H. Ulich (Rostock).

Prins, J. A.: Die Molekülanordnung in Flüssigkeiten und die damit zusammenhängenden Beugungserscheinungen. *Naturwiss.* 1931 I, 435—442.

Diese Arbeit gibt neben einigen Erweiterungen früherer (Z. f. Physik 41, 184; 56, 617) zugleich eine Übersicht, wobei „die mathematischen Formeln möglichst in den Hintergrund gedrängt werden“. Man sollte sich nach Verf. die Anordnung der Flüssigkeitsmoleküle nicht als eine schlechtgelungene Nachahmung der Gitterstruktur im festen Zustand vorstellen, oder gar mit gut gelungener Struktur an einzelnen Stellen (sogenannter „Cybotaxis“), sondern als eine nur statistisch erfaßbare Unordnung, wobei es auf das Verteilungsgesetz $g(r)$ für die gegenseitigen Abstände r der Molekülzentren ankommt. Zur Erläuterung dieser Funktion werden Verteilungen von mm großen Samenkörnern auf einer Planglasplatte untersucht, einerseits durch ein Zählverfahren mit aufgelegter Kreistringskala, andererseits durch Beugung von sichtbarem Licht. Für 4 Werte der Dichte der Belegung werden Abbildungen der Verteilung, der Beugungsringe, des beobachteten Intensitätsverlaufs in diesen und des aus g berechneten, zusammengestellt. Letzterer wird aus $I(s) = I_0(s) [1 + \int_0^\infty 2\pi r J_0(rs) g(r) dr]$

gefunden, wo I_0 die Intensität ist, welche entstehen würde, wenn dieselbe Anzahl Körner regellos gestreut läge (Gasbild), und der Beugungswinkel φ in die Variable $s = 2\pi \sin \varphi / \lambda$ eingeht. Im dreidimensionalen Fall ist in dieser Formel die Besselsche Funktion J_0 durch einen Sinus zu ersetzen. Durch Umkehrung der Formel kann man für wirkliche Flüssigkeiten die Verteilungsfunktion $g(r)$ aus der beobachteten Röntgenbeugung berechnen. Den allmählichen Übergang vom Gas- zum Flüssigkeitsbeugungsbild, wie das Modell ihn zeigt, findet man auch in den wiedergegebenen Aufnahmen von Krishnamurti von Fruktoselösungen steigender Konzentration. Es werden schließlich einige Fälle angeführt, wo die kinetische Betrachtung eine explizite Berechnung von g sowie der gebeugten Intensität ermöglicht hat, nämlich eindimensionale Anordnungen von starren Kugeln ohne und mit elastischer Bindung. Die Beugungsmaxima sind hier höher als für wirkliche Flüssigkeiten, wie aus dem Vergleich mit Quecksilber und Benzol hervorgeht. Es folgt noch eine allgemein gehaltene Betrachtung über den Schmelzvorgang.

F. Zernike (Groningen).

Anzelius, Adolf: Über die Bewegung der anisotropen Flüssigkeiten. Uppsala Univ. Arsskr., Mat. och Naturvet. Nr 1, 1—84 (1931).

It is assumed that in a sufficiently small volume containing the point P with coordinates x_1, x_2, x_3 , the molecules of an anisotropic fluid are shaped like axially symmetric rods whose axes are approximately parallel to a certain preferred direction associated with P and specified by a unit vector L with components L_1, L_2, L_3 . The stress-components τ_{ij} are supposed to depend only upon the momentary state of affairs at P in a manner expressed by the equation $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij}$ where p is the pressure, δ_{ij} is the unit tensor and $\bar{\tau}_{ij}$ is a tensor whose components are linear functions of the 9 partial derivatives $u_{k,i}$ of the component velocities u_1, u_2, u_3 ($u_{k,i} = \partial u_k / \partial x_i$). The coefficients in these linear functions are reduced in number from 81 to 45 with the aid of the principle of energy and it is thus found that $2\tau_{ij} = \partial F / \partial u_{i,j}$ where F is a homogeneous quadratic function of the quantities $u_{i,j}$. The conditions that F may have L as an axis of symmetry then lead to the expression

$$F = A(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + B(E_{11}L_1^2 + E_{22}L_2^2 + E_{33}L_3^2 + 2E_{23}L_2L_3 + 2E_{31}L_3L_1 + 2E_{12}L_1L_2) + CQ^2 + 2D\theta Q + E\theta^2$$

where

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1}, & 2e_{23} &= u_{2,3} + u_{3,2}, \\ E_{11} &= e_{23}^2 - e_{22}e_{33}, & E_{23} &= e_{11}e_{23} - e_{12}e_{13}, & \theta &= e_{11} + e_{22} + e_{33}, \\ Q &= e_{11}L_1^2 + e_{22}L_2^2 + e_{33}L_3^2 + 2e_{23}L_2L_3 + 2e_{31}L_3L_1 + 2e_{12}L_1L_2. \end{aligned}$$

The orientation of a molecule is next assumed to be a function of position only and to be produced by two systems of forces, one arising from collisions with neighbouring

molecules, the other from the mutual attractions of the molecules. The moment of the latter system is obtained from the first variation of Oseen's expression for the potential; the moment of the first system is derived in two different ways, the final expression involving 8 constants characteristic of the fluid. Special discussions are given of plane laminar flow, the Poiseuille flow in a straight cylindrical tube and the Couette flow between coaxial cylinders. In the case of flow through the tube the flow is found to depend on the pressure drop in the manner found experimentally if $C < 0$ and in this case the distribution of velocity over the cross section differs from that in the isotropic fluid, the velocity near the center being relatively greater. The orientation of the molecules depends, moreover, upon the direction of flow; with increasing velocity of flow it tends to become parallel to the axis of the tube. The stability of the Couette flow is discussed by an extension of Taylor's method and an explanation is found for the experimental result of Andrade and Lewis. It is shown also that the three characteristic coefficients of viscosity of an incompressible anisotropic fluid A , B and C , can be determined experimentally with the aid of Couette's apparatus. The paper closes with a discussion of the rotation of anisotropic drops, observed by Lehmann, when a sample in the microscope is heated from below. *H. Bateman.*

Weise, Artur: Allgemeine algebraische und graphische Berechnung von technischen Arbeitsprozessen mit Zweistoffgemischen. Z. Kälte-Industrie 38, 17—20 u. 33—37 (1931).

Zur vereinfachten, übersichtlichen Behandlung der meisten technischen Gemischaufgaben werden allgemeingültige Gleichungen und Konstruktionsregeln für das i - ξ -Diagramm angegeben, die leicht auf die Sonderaufgaben angewandt werden können und diese unter einen einheitlichen Gesichtspunkt bringen. Sie werden an praktisch wichtigen, neuen Beispielen erläutert. *Autoreferat.*

Relativitätstheorie.

Linder, Arthur: Ludwig Schlaefli über den physikalischen Raum. Ein Beitrag zur Vorgeschichte der Relativitätstheorie. Commentarii math. helvet. 3, 148—150 (1931).

Am Schlusse einer Abhandlung aus dem Jahre 1871 macht Schlaefli einige ansehend unbeachtet gebliebene Bemerkungen, die deutlich Grundgedanken der Relativitätstheorie vorausnehmen. Es wird von dem Raum gesprochen, „soweit“ er, „wie die Zeit, als wesentlicher Bestandteil der Reihe der wirklichen Erscheinungen angehört“ und eine Inhomogenität dieses Raumes als möglich hingestellt. Der Raum brauchte nicht von konstanter Krümmung zu sein, sondern „es würde auch ein Gewebe von sehr großer linearer Einheit ausreichen, und es könnten in dessen Definitionsformel die sechs Koeffizienten sowohl Funktionen der Zeit als auch der drei Koordinaten sein“. *Wessel (Coimbra).*

Castelnuovo, Guido: Forma e dimensioni dell'universo. Scientia (Milano) 49, 403—412 (1931).

Elementare Übersicht über die historische Entwicklung der wissenschaftlichen Grundgedanken (Riemann, Einstein, Minkowski, De Sitter), die zum Problem der Gestalt und Größe des Weltalls geführt haben. *Bossolasco (Turin).*

Podolsky, Boris: A tensor form of Dirac's equation. (California Inst. of Technol., Pasadena.) Physic. Rev., II. s. 37, 1398—1405 (1931).

Die Diracschen vierreihigen Matrizen Γ_{rs}^α in der Diracschen Gleichung werden als Tensoren aufgefaßt, die nach Einführung von n -Beinen allgemein kovariant zu transformieren sind. Die Diracsche Gleichung genügt dann der allgemeinen Relativität, wenn unter p_α nicht $\hbar/2\pi i \partial/\partial \alpha$, sondern „ $\hbar/2\pi i$ mal der kovarianten Differentiation in bezug auf α “ verstanden wird. Der Erhaltungssatz für den Strom gilt, ebenso für Energie und Impulsmoment. Die Invarianz gegenüber Lorentz-Transformationen und fernparallele n -Beindrehungen wird dargetan. *Heesch (Göttingen).*

Laporte, Otto, and George E. Uhlenbeck: Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations. (*Dep. of Phys., Univ. of Michigan, Ann Arbor.*) *Physic. Rev.*, II. s. **37**, 1380—1397 (1931).

Nach einer Darstellung der van der Waerdenschen Spinoranalysis werden die Maxwell'schen und die Dirac'schen Gleichungen in Spinorform geschrieben (die Tensorform dieser Gleichungen ist vorangestellt). Die Spinorform bietet nicht nur formale Vorteile, die in der Kürze der Formeln liegen, sondern sie läßt vor allem Raum für alle Darstellungen der Lorentzgruppe, während die Tensorschreibweise bekanntlich die Hälfte aller Darstellungen ignorieren mußte. Die Bildung der Gleichung 2. Ordnung aus der Spinorform der Dirac'schen Gleichung ergibt die Formel von Gordon mit dem Spinkorrektionsgliede. Die Gordon-Darwinsche Zerlegung des Stromes ergibt sich auf natürliche Weise. Die vier Invarianten, die sich durch Elimination des Potentials ergeben, und die beiden quadratischen Invarianten werden aufgestellt. Die Darwinsche Ableitung aus einem Variationsprinzip führt, in Spinorform ausgeführt, zum gleichen Resultat.

Heesch (Göttingen).

Uhlenbeck, G. E., and Otto Laporte: New covariant relations following from the Dirac equations. (*Dep. of Phys., Univ. of Michigan, Ann Arbor.*) *Physic. Rev.*, II. s. **37**, 1552—1554 (1931).

In den Dirac'schen Gleichungen können entweder die ψ oder die Γ_k der Transformation unterworfen werden. Der erste Standpunkt wurde in einer vorhergehenden Arbeit (vgl. das obige Referat) durchgeführt, während hier der Matrix-Vierervektor Γ^i zu den physikalischen Größen in Beziehung gesetzt wird. Die Γ^i transformieren sich wie der Viererstrom j^i , die Produkte $\Gamma^i \Gamma^k$ wie der „Sechservektor“ M^{ik} , die Produkte zu je dreien wie ein weiterer Vierervektor k^i ; die Beziehung zwischen den räumlichen Komponenten von M^{ik} und k^i ist physikalisch noch nicht eindeutig.

Heesch (Göttingen).

Zaycoff, Rascheo: Zur relativistischen Synthese der Feldvorstellungen. *Ann. Physik*, V. F. **9**, 715—732 (1931).

Eine Vereinigung von Gravitation, Elektromagnetismus, Materiewellen wird erstrebt durch Feldgleichungen, bei deren Ableitung als leitender Gesichtspunkt benutzt wird die gewöhnliche Kovarianz gegenüber allgemeinen Punkttransformationen, weiterhin die „Beinkovarianz“, d. h. Kovarianz gegenüber Drehungen des fundamentalen Beingitters h_m^α , und die Eichkovarianz. Die Feldgleichungen werden durch Variation aus einem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet. Die fundamentale Invariante wird additiv aus 3 Teilen zusammengebaut. Der erste Teil ist eine rein geometrische Krümmungsgröße (die übliche Riemannsche Invariante), der zweite Teil liefert den Elektromagnetismus, der dritte Teil die Dirac'sche Theorie der Materiefelder, mit einer gewissen Erweiterung.

Lanczos (Lafayette).

Mathisson, Myron: Bewegungsproblem der Feldphysik und Elektronenkonstanten. *Z. Physik* **69**, 389—408 (1931).

Die Feldgleichungen von Maxwell und Einstein führen zu keinen eindeutigen Potentialen der Metrik und des elektromagnetischen Feldes, solange man über die Singularitäten keine bestimmten Voraussetzungen macht. Diese Eindeutigkeit kann man erreichen, indem man das Unendlichwerden der exakten Potentiale in der Umgebung der Materiewellen von der niedrigsten erlaubten Ordnung annimmt, einen Anschluß an die statische Lösung für das isolierte Teilchen fordert und Dipole dynamischen Ursprungs ausschließt. Es wird dadurch die Möglichkeit überzähliger mechanischer Gleichungen ausgeschlossen. Die Rechnungen werden zwangsläufig, die Unveränderlichkeit der statischen Konstanten eines Teilchens beim Durchgang durch Felder läßt sich nicht sichern. Es folgen Betrachtungen über den kosmologischen Untergrund der Welt und über eine dynamische Auffassung der Materiekonstanten.

Lanczos (Lafayette).

Straneo, Paolo: Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità. Boll. Un. mat. ital. 10, 116—121 (1931).

Die Vereinheitlichung von Gravitation und Elektrizität wird dadurch versucht, daß die allgemeinen Verschiebungsgrößen, bezeichnet mit $L_{\mu\nu}^\alpha$, folgendermaßen angesetzt werden: $L_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + 2\delta_\mu^\alpha \psi_\nu$. Geometrisch bedeutet das, daß der räumlichen Struktur außer der Krümmung noch eine Torsion zugeschrieben wird. Bildet man mit diesen Verschiebungsgrößen den üblichen Riemannschen Krümmungstensor und geht dann durch Verjüngung zum Einsteinschen Tensor über, so kann man den symmetrischen Teil mit der Gravitation, den antisymmetrischen mit dem elektromagnetischen Feld in Verbindung bringen, wobei der Vektor ψ_ν die Rolle des Vektorpotentials spielt. Die Elektrizität wird also geometrisch als Torsion der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit gedeutet.

Lanczos (Lafayette).

Meksyn, D.: Electromagnetic phenomena in a uniform gravitational field. (Math. Dep., Univ., Edinburgh.) Proc. roy. Soc. Edinburgh 51, 71—79 (1931).

The author evaluates rigorously the electromagnetic field due to an electron moving freely in a „uniform“ gravitational field, that is to say, a field whose metric is specified by

$$ds^2 = (1 + 2gx/c^2) dt^2 - \frac{ds^2}{1 + 2gx/c^2} - dy^2 - dz^2$$

where g is the gravitational acceleration and c is the velocity of light: and shows that the rate of radiation of energy due to the motion of an electron is $\frac{2}{3} e^2 g^2 / c^3$, which is precisely Larmor's value.

Whittaker (Edinburgh).

Takéuchi, Tokio: Über die Abnahme der Lichtgeschwindigkeit. (Phys. Inst., Techn. Hochsch., Tokyo.) Z. Physik 69, 857—858 (1931).

Aus dem Tolmanschen Linienelement berechnet der Verf. eine Abnahme der Lichtgeschwindigkeit pro Jahr um $1,5 \text{ cm/sec}^{-1}$ unter Zugrundelegung der Beobachtungen für Rotverschiebung und der Massenverwandlung in Strahlung. Fr. Zerner (Wien).

Takéuchi, Tokio: On the diminution of the velocity of light. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 178 (1931).

Es wird gezeigt, wie eine säkulare Abnahme der Lichtgeschwindigkeit im Rahmen der Relativitätstheorie erklärt werden kann; doch kommt man dabei keinesfalls auf den von Gheury de Bray (z. B. Astron. Nachr. 230, 449 [1927]) für verbürgt angesehenen Betrag der Abnahme, wenn man gleichzeitig die Radialgeschwindigkeiten der Spiralnebel erfassen will.

O. Heckmann (Göttingen).

Takéuchi, Tokio: Is the line-element for the universe affected by the presence of the electro-static field? Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 179—182 (1931).

Mit der Annahme, daß das Linienelement kugelsymmetrisch und statisch sei, daß der Energieimpulstensor außer den bekannten Termen für eine isotrop verteilte Materie und ein isotropes Strahlungsfeld auch noch elektrische Spannungen enthalte, wird gezeigt, daß bei der Auflösung der Feldgleichungen sich gleichwohl kein Einfluß des elektrostatischen Feldes auf die Metrik ergibt.

O. Heckmann (Göttingen).

Einstein, A.: Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 12, 235—237 (1931).

Die Beobachtungen Hubbles über die Rotverschiebung der außergalaktischen Nebel zeigt eine allgemeine Dilatationsbewegung, womit die Voraussetzung des statischen Charakters des metrischen Untergrundes hinfällig wird. Dann ist aber auch die Einführung eines besonderen „kosmologischen“ Gliedes in die Feldgleichungen nicht mehr notwendig, das gerade dafür sorgen mußte, daß die durch die Gravitationswirkung bedingte zeitliche Änderung des Krümmungsradius kompensiert wird. Schon die ursprünglichen Feldgleichungen $R_{ik} = 0$ geben einen sphärisch geschlossenen Raum infolge der endlichen mittleren Massendichte, die eine solche Krümmung verursacht. Der Krümmungsradius ist dabei eine bestimmte Funktion der Zeit. (Friedman 1922.) Von einem sehr kleinen Anfangswert ausgehend, wächst der Radius P vorerst sehr

rasch, dann immer langsamer, erreicht schließlich einen Grenzwert P_0 , worauf das Ganze in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen wird. Aus der Beziehung zwischen Rotverschiebung und Entfernung berechnet sich nach den empirischen Daten eine mittlere Massendichte von der Größenordnung 10^{-26} , und ein gegenwärtiger Radius von der Größenordnung 10^8 Lichtjahre, während die Zeit, wo $P = 0$ wird, nur etwa 10^{10} Jahre zurückliegen würde. Die letztere Schwierigkeit zeigt, daß eine Extrapolation auf so große Zeiträume mit Gefahren verbunden ist. *Lanczos (Lafayette).*

Lemaître, G.: The expanding universe. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 490 bis 501 (1931).

Ziel der Arbeit ist die Angabe einer physikalischen Ursache, auf Grund deren eine statische Zylinderwelt (im Sinne Einsteins) beginnen soll sich auszudehnen. Die sehr speziellen Rechnungen des Verf. lassen sich nicht kurz reproduzieren. Hauptgedanke: Gäbe es in der Welt keine Kondensationen oder Konzentrationen von Materie, wäre die Materie vielmehr ganz gleichmäßig verteilt, so könnte die (offenbar von inkohärenten Partikeln getragen gedachte) Energie sich beliebig frei im Raume bewegen. Sind aber Kondensationen vorhanden, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein beträchtlicher Teil der Energie von den Kondensationen eingefangen und festgehalten wird. Dadurch entsteht eine Verminderung des Druckes, die von einer Vergrößerung des räumlichen Volumens der Welt begleitet ist, also zur Ausdehnung führen muß. Die Kondensationsbildung ist somit der „Katalysator“ der Ausdehnung, die jedoch — wie der Verf. ausrechnet — vom Grade der Kondensationsbildung unabhängig ist. *O. Heckmann (Göttingen).*

Juvet, G.: Sur quelques solutions des équations cosmologiques de la relativité. Commentarii math. helvet. **3**, 154–172 (1931).

Der Verf. betrachtet Lösungen der Feldgleichungen, bei welchen der räumliche Teil der Welt in Parameterdarstellung charakterisiert wird durch $x_1 = f(\Theta)$; $x_2 = g(\Theta) \cos \varphi$; $x_3 = g(\Theta) \sin \varphi \cos \omega$; $x_4 = g(\Theta) \sin \varphi \sin \omega$, dessen Linienelement also $d\sigma^2 = D^2 d\Theta^2 + g^2(d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\omega^2)$ lautet mit $D^2 = f'^2(\Theta) + g'^2(\Theta)$. Der Raum ist rotationssymmetrisch um die x_1 -Achse. Seine Meridianlinie wird in der $x_1 x_2$ -Ebene beschrieben durch $x_1 = f(\Theta)$; $x_2 = g(\Theta)$. In Teil I, statischer Fall: $d s^2 = -d\sigma^2 + C^2 dt^2$, wo $C = C(\Theta)$ ist. Unter den Voraussetzungen $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$, $T_{44} = \rho$, $\rho = \rho(\Theta)$, $p = p(\Theta)$, werden ρ und p bestimmt. Die bekannten Lösungen von Einstein und de Sitter ergeben sich dabei als sehr spezielle Fälle. In Teil II, nichtstatischer Fall: $d s^2 = -A^2 d\sigma^2 + C^2 dt^2$, wo nun $A = A(t)$ ist, $d\sigma$ aber noch die gleiche Form hat wie vorher. p und ρ werden als Funktionen von Θ und t erhalten. Einige Spezialfälle werden diskutiert. In Teil III, unstetige Lösungen, werden statische Lösungen besprochen mit $p = 0$, $\rho = \text{const.}$ und der Annahme, daß die kosmologische „Konstante“ λ in verschiedenen Gebieten des Raumes verschiedene, aber jeweils konstante Werte habe. Damit läßt man natürlich die Voraussetzung der Stetigkeit der g_{ik} fallen. Der Verf. vermutet, daß solche Lösungen eine Rolle spielen können beim Studium kugelförmiger Sternhaufen oder Nebel. *Heckmann (Göttingen).*

Takéuchi, Tokio: On the cyclic universe. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. **13**, 166–177 (1931).

Der Verf. glaubt, daß eine Welt mit dem Linienelement

$$ds^2 = -e^{\sin kt}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \left/ \left(1 + \frac{r^2}{4R^2}\right)^2 + dt^2 \right.$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $\Theta \leq kt \leq \pi - \Theta$; k, R, Θ Konstante, eine physikalisch sinnvolle Erfüllung von Boltzmanns Wunsch nach einem „zyklischen“ Universum sei. Mit diesem Linienelement ist (natürlich) eine ganz bestimmte Zustandsgleichung der Materie gesetzt, die zugleich — nach des Verf. Ansicht in befriedigender Weise — die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung erfaßt. Es wird eine Reihe von Folgerungen aus dem angenommenen Linienelement gezogen. *O. Heckmann.*

Quantentheorie.

Kennard, E. H.: The conditions on Schrödinger's ψ . *Nature* (Lond.) **1931 I**, 892 bis 893.

Die mathematischen Bedingungen, denen die Schrödingerfunktion unterworfen ist, werden aus den physikalischen Postulaten der Quantenmechanik abgeleitet.

L. Rosenfeld (Kopenhagen).

Langer, R. M., and N. Rosen: The neutron. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge [U. S. A.]*) *Physic. Rev.*, II. s. **37**, 1579—1582 (1931).

Die Verf. glauben, die Annahme eines Neutrons, eines Systems tiefer Energie und geringer Ausdehnung bestehend aus einem Proton und einem Elektron, beseitige manche Schwierigkeit im Verständnis des Aufbaues der Kerne, und sie diskutieren die Verträglichkeit dieser Annahme mit der Quantenmechanik. *Hund* (Leipzig).

Tanaka, Tokuji: Über das magnetische und das elektrische Moment des Diracschen Elektrons. (*Phys. Inst., Univ. Sendai.*) *Z. Physik* **69**, 810—821 (1931).

Im Anschluß an die von Gordon gegebene Zerlegung des Diracschen Stroms in Konvektions- und Polarisationsstrom werden die Bewegungsgleichungen des Diracschen Elektrons (als Gleichungen zwischen Erwartungswerten) so formuliert, daß die Kraftwirkungen des Feldes auf Pol und (magnetisch-elektrischen) Dipol getrennt und sehr einleuchtend hervortreten. Es ergibt sich die wellenmechanische Begründung einer Reihe von Formeln, die Frenkel früher mit Hilfe von corpuscularen Vorstellungen aufgestellt hat.

Fues (Hannover).

Kakinuma, Usaku: On the five-dimensional formulation of the „wave equation for the electron“. (*Mitsubishi Labor., Hongo, Tokyo.*) *Proc. phys.-math. Soc. Jap.*, III. s. **13**, 183—188 (1931).

In Fortsetzung früherer Arbeiten versucht Verf. die innere Struktur des Elektrons mit Hilfe einer speziellen fünfdimensionalen Metrik zu beschreiben. *L. Rosenfeld*.

Fermi, Enrico: Le masse elettromagnetiche nella elettrodinamica quantistica. *Nuovo Cimento*, N. s. **8**, 121—132 (1931).

Anschließend an seine ältere Arbeit über Quantenelektrodynamik [*Rend. Lincei* **12**, 431 (1930)] behandelt der Verf. das Problem der elektromagnetischen Masse in der Quantendynamik. Es werden Hypothesen gemacht, die äquivalent der Annahme eines endlichen Elektronenradius sind. Als Ergebnis einer Näherungsrechnung, deren Resultate der Verf. mit Vorsicht bewertet, ergibt sich, daß in der Quantendynamik die elektromagnetische Masse nicht von der elektrostatischen Energie der Ladungsverteilung abhängt, wie es in der klassischen Theorie der Fall ist. Der für die Masse erhaltene Ausdruck verschwindet beim Grenzübergang $\hbar \rightarrow 0$. *G. Rumer* (Göttingen).

Racah, G.: Caratteristiche delle equazioni di Dirac e principio di indeterminazione. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. **13**, 424—427 (1931).

Durch eine einfache und elegante Anwendung der Theorie der Charakteristiken auf die Diracsche Gleichung zeigt Verf., daß a) die Begrenzung eines Wellenpakets sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet; b) wenn die lineare Ausdehnung des Wellenpakets anfänglich klein gegen \hbar/mc ist, so ist die Wahrscheinlichkeit sehr klein, für das Elektron bei einer nachfolgenden Messung eine Geschwindigkeit kleiner als c zu finden.

L. Rosenfeld (Kopenhagen).

Weizsäcker, K. F. v.: Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop. *Z. Physik* **70**, 114—130 (1931).

Eine genauere Diskussion des bekannten Gedankenexperiments über die Messung eines Elektronenortes mittels eines Mikroskops führt noch auf gewisse Schwierigkeiten. Scheinbar ist nämlich die Abbildung unmöglich, da es die Messung nicht stören kann, wenn man vor der Beleuchtung den Impuls von Elektron und Lichtquant, nachher den des Elektrons genau mißt. Dadurch wird aber der Impuls des in das Mikroskop gestreuten Lichts bestimmt, und Licht einer bestimmten Ausbreitungsrichtung kann keine optische Abbildung liefern. Die Aufklärung liegt darin, daß nach dem Zu-

sammenstoßprozeß die Wahrscheinlichkeit, das Lichtquant irgendwo anzutreffen, mit der Wahrscheinlichkeit für das Elektron gekoppelt ist und das Lichtquant allein nicht mehr durch eine Welle im dreidimensionalen Raum beschrieben werden kann. Zur Diskussion dieses Sachverhalts benutzt der Verf. die Heisenberg-Paulische Methode der Quantenelektrodynamik. *Peierls (Zürich).*

Sen, D. K., and B. N. Biswas: On a theory of line spectra. *J. indian math. Soc.* **19**, 25—40 (1931).

Die Verff. postulieren eine neue Hypothese über die Bohrsche Frequenzbedingung $h\nu = E_1 - E_2$ nämlich „that the adjacent stationary orbits of the electron are such that the condition is satisfied where ν is some mean of the frequencies of all the dynamically possible orbits lying between the two stationary orbits in question.“ Sie wenden diese Hypothese an auf den harmonischen und anharmonischen Oszillator, den starren Rotator, die Bohr-Sommerfeldsche Ellipse und relativistische Ellipse und weiter auf den Stark- und Zeemaneffekt. Verff. betonen, daß es die neue Hypothese mit sich bringt, daß die Quantenzahlen nicht ganze Zahlen zu sein brauchen. *T. L. de Bruin.*

Bechert, K.: Bemerkungen zur Struktur der Spektren der „stripped atoms“. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. München.*) *Z. Physik* **69**, 735—741 (1931).

Der Verf. prüft die von Goudsmit abgeleitete Formeln für die Aufspaltungsfaktoren von Multiplettermen (die sog. Γ -Faktoren) an experimentellen Daten. 1. wird gefunden, daß die Gleichheit der Aufspaltungen der beiden kombinierenden Terme 3P und 3P der Konfigurationen sp und p^2 in den Mg - und Be -ähnlichen Spektren in Übereinstimmung mit den theoretischen Aussagen ist. Auch die Abweichungen von der Intervallregel in dem 3P -Term sind gedeutet worden in Übereinstimmung mit den von Houston und Goudsmit abgeleiteten Formeln. Weiter prüft Verf. die theoretische Erwartung über das Intervallverhältnis in den Termen von p^5s und p^4s^2 bei den PP' -Gruppen der S -ähnlichen Spektren. Die experimentellen Daten bestätigen die theoretische Aussage. Ein letztes Beispiel für die Goudsmitschen Formeln liefern die PP' -Gruppen in den Konfigurationen s^2p und sp^2 der C^+ - und Si^+ -ähnlichen Spektren. Auch hier stimmt die theoretische Erwartung gut mit der Erfahrung.

T. L. de Bruin (Amsterdam).

Racah, Giulio: Sopra le strutture iperfini. (*Istit. Fis., Univ., Roma.*) *Nuovo Cimento*, N. s. **8**, 178—190 (1931).

Bekanntlich läßt sich, unter der Annahme, daß die Hyperfeinstruktur durch ein magnetisches Kernmoment hervorgerufen wird, der Wert dieses Momentes aus der gemessenen Hyperfeinstruktur eines Spektralterms ableiten. Bei Indium und Thallium sind nun die Hyperfeinstrukturen mehrerer Terme bekannt; die daraus berechneten Werte der resp. Kernmomente stimmen aber gar nicht überein. Verf. untersucht zunächst den Einfluß verschiedener Verfeinerungen der theoretischen Rechnung auf diese Abweichungen: 1. Die Relativitätskorrektur wird für schwere Kerne sehr groß, genügt jedoch nicht, um die besprochenen Abweichungen zu beseitigen; 2. die Abweichung des elektrischen Kernfeldes vom Coulombfeld liefert ebenfalls nicht die gewünschte Größenordnung. Verf. verfolgt sodann rechnerisch die Hypothese, daß die Hyperfeinstruktur von einer axialen Symmetrie des elektrischen Kernfeldes herrühre; unter plausiblen Annahmen findet er für den $^2P_{3/2}$ -Term eine Aufspaltung von der richtigen Größenordnung, für die $^2S_{1/2}$ - und $^2P_{1/2}$ -Terme jedoch keine Aufspaltung, sondern nur eine Verschiebung von derselben Größenordnung. Ferner genügt die Aufspaltung nicht der Intervallregel, welche experimentell gut bestätigt wurde. Der anfangs erwähnte Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung bleibt also gänzlich ungeklärt.

L. Rosenfeld (Kopenhagen).

Blaton, J.: Gibt es eine Doppelstreuung von Lichtquanten? (*Inst. f. Theoret. Phys., Techn. Hochschule, Lemberg.*) *Z. Physik* **69**, 835—849 (1931).

Es wird der Einfluß von sehr intensiver Belichtung auf ein Atom betrachtet. Man erhält erstens eine Verschiebung (bzw. bei entarteten Termen: Aufspaltung)

des Energiewertes des Atoms, entsprechend einem von dem elektrischen Feld der Lichtwelle erzeugten Starkeffekt. Außerdem treten in dem elektrischen Moment des Atoms nicht nur Terme mit der Frequenz ν des Lichts, sondern auch solche mit 2ν , 3ν usw. auf, die der gleichzeitigen Wirkung von 2, 3 usw. Lichtquanten auf das Atom entsprechen und dementsprechend zu höheren Potenzen der Amplitude proportional sind. Diese Terme geben aber in einem homogenen Medium nicht zur Emission von Licht mit z. B. der Frequenz 2ν Anlaß, weil nur die zur Fortpflanzungsrichtung parallele Komponente des Dipolmoments für diese Übergänge von Null verschieden ist, die zu einer Strahlung in dieser Richtung nicht beiträgt. In jeder anderen Richtung löschen sich aber die von den verschiedenen Atomen herrührenden Wellen aus. Das gleiche wird für die Quadrupolstrahlung nachgewiesen, und zu diesem Zweck im Anhang eine Formel für das von einem schwingenden Quadrupol erzeugte Feld abgeleitet. *Peierls.*

White, H. E.: Pictorial representations of the electron cloud for hydrogen-like atoms. *Physic. Rev.*, II. s. 37, 1416—1424 (1931).

Die aus den Lösungen $\Psi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$ der Wellengleichung für das H-Atom folgenden Wahrscheinlichkeitsdichten $\Psi\Psi^*$ werden durch Zeichnungen anschaulich gemacht. Θ^2 wird für s , p , d ...-Terme und alle m -Werte dargestellt und mit der Lage der Bahn im klassischen Modell verglichen. Kurven für R^2 und $4\pi r^2 R^2$ werden mit der klassischen Bahn [Drehimpuls $\frac{h}{2\pi}(l + \frac{1}{2})$] verglichen, ferner der Mittelwert von r mit dem in 4 klassischen Bahnen [Drehimpulse l , $\sqrt{l(l+1)}$, $l + \frac{1}{2}$, $l + 1$ in Einheiten $h/2\pi$]. Ein mechanisches Modell gestattet, $\Psi\Psi^*$ selbst im Raum darzustellen und zu photographieren. Die Photographien zeigen sehr schön die charakteristischen Eigenschaften der verschiedenen Zustände. *F. Hund (Leipzig).*

● **Kohlrausch, K. W. F.: Der Smekal-Raman-Effekt.** (Struktur d. Materie in Einzeldarstell. Hrsg. v. M. Born u. J. Franck. Bd. 12.) Berlin: Julius Springer 1931. VIII, 392 S. u. 85 Abb. RM. 32.—.

Binkele, H. E.: Über die gastheoretischen Wirkungsquerschnitte der Moleküle. (*Phys.-Chem. Inst., Univ. Heidelberg.*) *Ann. Physik*, V. F. 9, 839—852 (1931).

Von Trautz wurden gemeinsam mit R. Zink und dem Verf. die Temperaturfunktion der inneren Reibung der Gase über ein größeres Temperaturgebiet bestimmt. Die vorliegende Arbeit zieht daraus die Folgerungen für die relativen Molekülquerschnitte, die bisher besonders bei H_2 , He und Ne nicht gut mit den aus der van der Waalschen Zustandsgleichung berechneten übereinstimmten. Angegeben werden neu korrigierte Werte der Konstanten in der Sutherlandschen und Reinganum'schen Formel, genauere Temperaturfunktionen des zweiten Virialkoeffizienten der van der Waals'schen Gleichung und Vergleiche der aus dieser und aus der Reibung bestimmten Konstanten, die jetzt besser stimmen. *Wessel (Coimbra).*

Margenau, Henry: Note on the calculation of van der Waals forces. (*Sloane Phys. Labor., Yale Univ., New Haven.*) *Physic. Rev.*, II. s. 37, 1425—1430 (1931).

Es ist bekannt, daß die Wechselwirkungsenergie 2. Ordnung zweier Atome (im s -Zustand) sich als Doppelsumme über die Dispersions- f -Werte darstellen läßt. In der üblichen Darstellung hat man eine Doppelsumme für Sprünge im Diskontinuum, eine Summe über ein Integral für Sprünge Diskontinuum-Kontinuum und ein Doppelintegral für Sprünge im Kontinuum zu addieren. Übergänge der Elektronen in diskrete Zustände oberhalb der Seriengrenze können direkt nicht berücksichtigt werden, da diese Terme meist nicht bekannt sind. Ihr Beitrag wird aber mit in das Doppelintegral einbezogen, wenn die f -Werte so angesetzt sind, daß der Kuhn-Reich'sche Summensatz erfüllt ist:

$$\sum_{\alpha}' f_{1\alpha} + \int_0^{\infty} \frac{d f_{1E}}{d E} d E = Z_0$$

(Z_0 = Zahl der Dispersionelektronen). Um auf diesem Wege die f -Werte zu bestimmen,

muß eine Annahme über ihre Verteilung im Kontinuum gemacht werden. Dazu wird der nach den Erfahrungen am H- und den Röntgenspektren plausible Ansatz gemacht: $\frac{d f_{1E}}{dE} = \frac{\gamma}{(1+E)^3}$ (E = Energie im Kontinuum). Das Ergebnis ist gegen den genauen Verlauf der Verteilungsfunktion nicht sehr empfindlich. Man setzt erstens den Summensatz an: $\beta \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha} + \gamma/2 = Z_0$; darin sind die Φ_{α} aus den relativen Intensitäten in der Hauptserie berechenbar. Für die unbekannten Konstanten γ und β erhält man eine 2. Gleichung dadurch, daß man die Polarisierbarkeit durch die f -Werte ausdrückt. Die Methode wird am Beispiel der Na-Atome geprüft, deren f -Werte bekannt sind. Man erhält eine gute Übereinstimmung mit dem exakten Wert der Wechselwirkungsenergie, wenn man in der Summe über das Diskontinuum nur die Resonanzlinie berücksichtigt. Bei Helium ergibt sich mittels der relativen Intensitäten von 10 Linien ein Wert dieser Energie, der nahezu mit dem von Slater und Kirkwood nach einer Variationsmethode erhaltenen übereinstimmt. *Eisenschitz* (Berlin).

Hückel, Erich: Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem. I. Die Elektronenkonfiguration des Benzols und verwandter Verbindungen. (*Inst. f. Theoret. Phys., Techn. Hochsch., Stuttgart.*) *Z. Physik* **70**, 204–286 (1931).

Für den aromatischen Charakter nicht gesättigter Ringsysteme (Benzol, Pyridin, Thiophen usw.) scheint es wesentlich zu sein, daß 6 Elektronen nicht paarweise in Einfachbindungen untergebracht werden können. Die Frage, wodurch solche Ringsysteme quantentheoretisch vor solchen mit anderen Anzahlen von Elektronen ausgezeichnet sind, wird an einem vereinfachten Modell untersucht: Ein ebener regulärer Ring von n CH-Gruppen mit je 6 Elektronen wird durch ein festes Kraftfeld ersetzt, das auf die noch nicht untergebrachten n Elektronen wirkt. Aus den Symmetrieeigenschaften des Kraftfeldes folgt eine Einteilung der Terme auf Grund der Symmetrieeigenschaften der Eigenfunktionen. Eine Abschätzung der energetischen Reihenfolge der Terme wird von zwei Seiten her in Angriff genommen. Die erste Methode geht aus von dem Fall, wo jedes der n Elektronen an einer CH-Gruppe ist, und betrachtet die Einwirkung der benachbarten Elektronen und der anderen CH-Gruppen gleichzeitig als Störung (wie im London-Heitler-Verfahren). Die Rechnung zeigt für gerades n eine festere Bindung als für ungerades, zeigt aber keine Auszeichnung für $n = 6$. Die zweite Methode geht von dem Fall aus, wo die Wechselwirkung der Elektronen miteinander verschwindet, aber für jedes Elektron das ganze Kraftfeld wesentlich ist (wie bei Blochs Behandlung der Elektronen in Metallgittern und bei vielen Untersuchungen in Molekeln). Sie spricht von Zuständen der einzelnen Elektronen und kennzeichnet sie durch Symmetrieeigenschaften ihrer Eigenfunktionen. Sie liefert eine Auszeichnung des Falles $n = 6$, indem dann die Elektronen eine abgeschlossene Schale bilden (2 Elektronen im tiefsten, 4 Elektronen im nächsten Zustand) und die gesamte Eigenfunktion die volle Symmetrie des n -Ecks hat. Die Methode ist auch anwendbar, wenn die Zahl der Elektronen größer ist als die Ringatome und führt auch dann zur Auszeichnung des Falles von 6 Elektronen. Durch die dreizählige Symmetrie in höheren Zuständen des Falles von 6 Atomen und 6 Elektronen kann man das alternierende Verhalten der CH-Gruppen im Benzol bei Substitutionen verständlich machen. *F. Hund* (Leipzig).

Hellmann, H.: Über die Kristallinterferenzen des Spinelektrons. *Z. Physik* **69**, 495–506 (1931).

In der vorliegenden Untersuchung werden die durch Reflexion von Elektronenwellen an Kristallen auftretenden Polarisationserscheinungen diskutiert. Das Verhalten der Elektronen wird durch die Diracschen Gleichungen beschrieben, das Potentialfeld des Kristalls möglichst allgemein angesetzt, indem sowohl schichtförmige Inhomogenitäten im Übergangsfeld als auch Kristalle ohne Symmetriezentrum mitbehandelt werden. Die Störungsrechnung liefert in erster Näherung Polarisations-effekte bei Kristallen ohne Symmetriezentrum, die jedoch sehr klein sind und mit den

von Rupp am regulären Gold angegebenen Beobachtungen nichts zu tun haben. Auch die Behandlung der Reflexionspolarisation nach der Ewald-Betheschen Methode liefert im wesentlichen nur verhältnismäßig intensitätsschwache Effekte für Krystalle ohne Symmetriezentrum. *O. Halpern* (New York).

Forrer, Robert, et J. Martak: Le champ démagnétisant structural des ferromagnétiques et sa détermination expérimentale. J. Phys. et Radium, VII. s. 2, 198—204 (1931).

Säuter, Fritz: Über den atomaren Photoeffekt bei großer Härte der anregenden Strahlung. Ann. Physik, V. F. 9, 217—248 (1931).

Versuch einer Berechnung des atomaren Photoeffekts auf Grund der Diracschen Wellengleichung. A. Sommerfeld und G. Schur [Ann. Physik (5) 4, 409, 433 (1930)] behandelten den Photoeffekt nichtrelativistisch in Polarkoordinaten für den Fall, daß der in die benötigten Matrixelemente eingehende Retardierungsfaktor $e^{2\pi i x/\lambda}$ durch die ersten 2 Terme seiner Entwicklung nach steigenden Potenzen von x/λ ersetzt werden darf. J. Fischer (vgl. dies. Zbl. 1, 313) konnte den Retardierungsfaktor durch Verwendung von parabolischen Koordinaten streng mitnehmen. Er erhielt so geschlossene Ausdrücke für die Intensitätsverteilung und die Gesamtphotoemission. Seine Formeln gelten für $v^2/c^2 \ll 1$. Für $v^2/c^2 \sim 1$ muß relativistisch gerechnet werden. Die Diracgleichung läßt sich nun bekanntlich fürs Coulombfeld nur in Polarkoordinaten separieren. Deshalb berechnet Verf. zunächst die nichtrelativistischen Fischerschen Formeln in Polarkoordinaten. Die dabei benötigte Aufsummierung gelingt nach einigen Umformungen auf Grund des Fouriertheorems der Kugelfunktionen. Für den relativistischen Fall wurden die Rechnungen vom Verf. in der vorliegenden Arbeit so weit durchgeführt, als man in Strenge durchkommt. (Eine näherungsweise Auswertung dieser Formeln wird nach freundlicher mündlicher Mitteilung des Verf. demnächst in den Ann. Physik erscheinen.) *Guth* (Wien).

Astronomie und Astrophysik.

Kienle, H.: Wandlungen des astronomischen Weltbildes. Naturwiss. 1931 II, 601—607.

● **Smart, W. M.: Text-book on spherical astronomy.** Cambridge: Univ. press. 1931. XI, 414 S. u. 146 Abb. geb. 21/—.

Die Behandlung des Stoffes ist ganz elementar, so daß Anfänger überall bequem folgen können. Das Prinzip, elementar zu sein, führt dabei an einigen Stellen zu großer Breite, an anderen zu nicht sofort zu überblickenden Vernachlässigungen. Das Werk ist eine brauchbare Einführung, solange auf Feinheiten nicht Rücksicht genommen zu werden braucht. Gute und zahlreiche Aufgaben vertiefen das Verständnis. Inhalt: I. Sphärische Trigonometrie. II. Die Himmelssphäre. III. Refraktion. IV. Der Meridiankreis. V. Planetenbewegung. VI. Zeit. VII. Planetenphänomene und heliographische Koordinaten. VIII. Aberration. IX. Parallaxe. X. Präzession und Nutation. XI. Die Eigenbewegung der Fixsterne. XII. Astronomische Photographie. XIII. Ortsbestimmung auf See. XIV. Doppelsternbahnen. XV. Sternbedeckungen und Finsternisse. Man erkennt daraus ein stofflich modernes Werk, das auch Dinge behandelt, die in älteren Werken ähnlichen Charakters (neuere gibt es nicht) fehlen. Auf die Einrichtung der modernen astronomischen Jahrbücher ist überall Rücksicht genommen.

Heckmann (Göttingen).

Shook, C. A.: Expansion of the disturbing function in terms of the true longitude of the disturbed planet. Monthly Not. roy. astron. Soc. 91, 553—558 (1931).

An Stelle der Zeit t wird die wahre Länge v des gestörten Planeten als unabhängige Variable in die Störungsfunktion $R = m' \left(\frac{1}{A} - \frac{r}{r'^2} \cos S \right)$ eingeführt. r, r' sind die heliozentrischen Distanzen des gestörten und des störenden Planeten, A ihr gegenseitiger Abstand, S der Winkel zwischen r und r' , m' die Masse des störenden Planeten. Zwischen t und v besteht die Beziehung $(c/r^2) dt = dv$, mit der wahren Länge v' des störenden

Planeten ist v durch die Gleichung $(c/c')(r'/r)^2 dv' = dv$ verbunden, c, c', r, r' als bekannte Funktionen der Zeit aufgefaßt. Nach einer Methode von E. W. Brown [Astron. J. Nr. 935 (1930)] werden r und r' in Fourierreihen nach Vielfachen der wahren Längen v bzw. v' entwickelt. Durch Einführung eines Parameters η an Stelle der Exzentrizität e wird erreicht, daß die Fourierkoeffizienten in einfacher Weise mit der hypergeometrischen Reihe zusammenhängen. $\cos S$ wird unter Benutzung des Parameters $T = \tan I/2$ (I der Winkel zwischen den momentanen Bahnebenen der beiden Planeten) in üblicher Weise dargestellt. Die Störungsfunktion R ergibt sich also zunächst als Fourierreihe mit $jv + j'v'$ als Argument. Die Berechnung der Koeffizienten ist bis zu den Gliedern 2. Ordnung der als klein vorausgesetzten Parameter η, η' und T durchgeführt. Die wahre Länge v' wird in der folgenden Weise eliminiert: Die Differenz zwischen mittlerer und wahrer Länge des störenden Planeten läßt sich nach den üblichen Methoden als Sinusreihe nach Vielfachen der mittleren Anomalie berechnen. Dieses Winkelargument wird eliminiert, indem für den gestörten Planeten eine entsprechende Fourierreihe entwickelt wird, jedoch nicht mit der mittleren, sondern mit der wahren Anomalie und deren Vielfachen als Winkelfargument. Man erhält $v' = (n'/n)v + C + \sum c \sin jv$. Bei der Berechnung der Koeffizienten c wurden noch die Glieder 4. Ordnung in η und η' berücksichtigt. Die Elimination von v' führt die Störungsfunktion in eine Fourierreihe nach Vielfachen der wahren Länge v über. In den Koeffizienten sind Glieder bis zur 2. Ordnung in η, η' und T berücksichtigt. Die Fortführung der Rechnung (Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung) wird für die nächste Zukunft in Aussicht gestellt.

A. Klose (Berlin).

Perrine, C. D.: The rotational motion of the galaxy. Astron. Nachr. 1931 I, 89—102.

Pacella, G. B.: Statistica stellare. Rend. Semin. mat. e fis. Milano 4, 50—76 (1931).

Die während 2 Jahren unternommenen Arbeiten auf der Sternwarte Merate über die absoluten Größen der A- und F-Sterne führten den Verf. zu einem tiefgehenden Studium der verschiedenen Methoden der Stellarstatistik. In der vorliegenden Arbeit würdigt er die analytischen Hilfsmittel der Stellarstatistik und legt die verschiedenen Resultate der stellarstatistischen Arbeiten Charliers klar. Als Anwendung dieser Resultate werden die beiden Theorien der Sternbewegungen auseinandergesetzt und Kapteyns Ansichten beschrieben.

Hubert Slouka (Prag).

Cecchini, G.: La distribuzione delle stelle nello spazio e la struttura dell'universo. Rend. Semin. mat. e fis. Milano 4, 77—116 (1931).

Es werden die verschiedenen Methoden, die zur Kenntnis der Sternverteilung führen, behandelt und ihre Bedeutung in der Stellarstatistik erläutert. Es wird die historische Reihenfolge eingehalten; auch die neuesten Forschungsergebnisse sind berücksichtigt.

Hubert Slouka (Prag).

Ten Bruggencate, P.: Der physikalische Zustand elliptischer Nebel. Naturwiss. 1931 I, 455—459.

Bericht über eine Arbeit von Hubble [Astrophysic. J. 71, 231 (1930)] und zwei weitere des Verf. [Z. Astrophysik 1, 275 (1930); 2, 83 (1931)]. Aus den photometrischen Untersuchungen Hubbles, die ziemlich ausführlich geschildert werden, wird der Schluß gezogen, daß die elliptischen Nebel einen strahlenden Kern besitzen, dessen Licht in der äußeren, gasförmigen Nebelhülle gleichmäßig nach allen Seiten gestreut wird ohne Absorption und Reemission. Die Ansicht, daß die elliptischen Nebel „Sternwolken“ seien, wird abgelehnt. Ein Hinweis auf eine Bemerkung van Maanens, daß der Kern des Spiralnebels N.G.C. 4051 den Spektralcharakter planetarischer Nebel zeige, dient — neben anderen Argumenten — als Stütze der vorgetragenen Theorie.

O. Heckmann (Göttingen).

Armellini, G.: Sopra la teoria delle variabili della famiglia di Mira Ceti. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 313—317 (1931).

Verf. versucht den merklichen Unterschied zwischen der photometrisch gemessenen Lichtänderung (200 : 1) und der bolometrisch oder thermoelektrisch gemessenen Strah-

lungsänderung (3 : 1 und 2 : 1) der Mira-Ceti Veränderlichen zu erklären, indem er bei Zuhilfenahme des Planckschen Strahlungsgesetzes für die maximale Temperatur den Wert 1500, für die minimale 1100 berechnet, ein Ergebnis, das aber mit den Farbenindexbestimmungen nicht gut vereinbar wäre. Es zeigt sich also notwendig die Merillische und Hopmannsche Hypothese einer Änderung der Strahlungsdurchlässigkeit der Sternatmosphäre als vorläufig richtig anzuerkennen.

Hubert Slouka (Prag).

Eddington, A. S.: Upper limits to the central temperature and density of a star. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 444—446 (1931).

Unter der Annahme, daß die Dichte nach innen nicht abnimmt und daß die Sternmaterie im innersten Teil des Sterns entartet ist und demnach der Zustandsgleichung $p = k\rho^{5/2}$ genügt, werden obere Grenzen für die zentrale Temperatur und Dichte abgeleitet. Nimmt man die Dichte als konstant an, so ergibt sich für einen Stern von Sonnenmasse $\rho_{\max} = 1,91 \cdot 10^7$ und $T_{\max} = 3,44 \cdot 10^9$. Die abgeleitete Temperatur entspricht einem Zustand der Sternmaterie, der etwa in der Mitte zwischen den Zuständen des vollkommenen Gases und der vollkommenen Entartung liegt. Die berechneten Werte ρ_{\max} und T_{\max} gelten in gleicher Weise für nichtentartete Sternmaterie. Sie werden auch bei Berücksichtigung der Ungleichförmigkeit der Sternichte nicht wesentlich geändert.

H. Brück (Potsdam).

Chandrasekhar, S.: The dissociation formula according to the relativistic statistics. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 446—455 (1931).

As a generalisation of some recent work of Milne the author gives the dissociation formulae for a gas mixture in which n_1, n_2, \dots molecules of gases C_1, C_2, \dots react reversibly to yield n'_1, n'_2, \dots molecules of gases C'_1, C'_2, \dots with the liberation of energy, X , so that $\sum_r n_r C_r = \sum_s n'_s C'_s + X$. The mixture has volume V , temperature T , and contains N_1, N_2, \dots molecules of C_1, C_2, \dots , and N'_1, N'_2, \dots molecules of C'_1, C'_2, \dots . The equilibrium condition is given by the elimination of $\alpha_1, \alpha_2, \dots; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots$ from the equations

$$N_r = kT \int_0^\infty \frac{x_r d\vartheta}{e^{\alpha_r + \vartheta + \epsilon_r}}; \quad N'_s = \int_0^\infty \frac{x'_s d\vartheta}{e^{\alpha'_s + \vartheta + \epsilon'_s}}; \quad \sum_r n_r \alpha_r = \sum_s n'_s \alpha'_s + \frac{X}{kT},$$

where x_r is the number of cells in the energy interval $(E, E + dE)$ for molecules C_r . If the molecules C_r obey Einstein-Bose statistics then $\epsilon_r = 1$; if they obey Fermi-Dirac statistics then $\epsilon_r = -1$. He applies these results to cases where the relativity effect has to be taken into account. If this effect is predominant for any component C_r then x_r is given by $ZdE = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} q E^2 dE$ instead of the usual formula

$$ZdE = \frac{2\pi V}{h^3} q (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} dE$$

(q = statistical weight). He tabulates the criteria for degeneracy for the cases of negligible and predominant relativity effects respectively. His final relativistic ionisation formulae, where C, C_+, C_e are the concentrations of atoms, ions and electrons respectively and q, q_+, q_e their statistical weights, are

$$\frac{C_+ \cdot C_e}{C} = \frac{q_+ \cdot q_e}{q} 8\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 e^{-X/kT},$$

if all the components are non-degenerate, and

$$\log\left(\frac{C}{C_+} \frac{q_+}{q}\right) = \frac{X}{kT} + \frac{hc}{kT} \left(\frac{3C_e}{4\pi q_e}\right)^{\frac{1}{3}},$$

if the electrons are degenerate and the atoms and ions non-degenerate. He shows that these results are unaltered if it is only the electrons which show a relativity effect. Finally numerical applications are made to some stellar conditions given by Milne, and the physical significance discussed.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Siedentopf, H.: Der Grundzustand überdichteter Gaskugeln. (*Univ.-Sternwarte, Jena.*) *Astron. Nachr.* 1931 I, 281–288.

Der Verf. untersucht die Frage, inwieweit eine Gaskugel bei Kontraktion einem Gleichgewichtszustand zustrebt, der dadurch charakterisiert sein soll, daß eine weitere Kontraktion nur bei Energiezufuhr von außen oder aus subatomaren Quellen möglich ist. In diesem „Grundzustand“ soll gleichzeitig die Materie vollkommen entartet sein. Die Bedingung für die Existenz eines solchen Grundzustandes ist die, daß für ihn die gesamte im Stern enthaltene Energie, dargestellt als Funktion der mittleren Elektronendichte, ein Minimum wird. Die Gesamtenergie setzt sich aus Gravitationsenergie, kinetischer, elektrostatischer und Strahlungsenergie zusammen. Diese einzelnen Energiebeträge werden in ihrer Abhängigkeit von der mittleren Elektronendichte betrachtet. Es wird schließlich die Frage aufgeworfen, ob die abgeleitete Gleichgewichtsbedingung die Existenz eines Grundzustandes für Gaskugeln beliebiger Masse ermöglicht macht. Diese Frage wird im Gegensatz zu Frenkel, Stoner und Anderson bejaht, allerdings unter der noch nicht endgültig geklärten Voraussetzung, daß auch die Kerne der Fermi-Statistik gehorchen. H. Brück (Potsdam).

Strömgren, Bengt: The point-source model with coefficient of opacity $k = k_1 \rho T^{-3.5}$. *Z. Astrophys.* 2, 345–369 (1931).

The author's object is to extend previous investigations on a star with a uniformly distributed source of energy and a constant opacity coefficient, the "standard" model, to the model with the source confined to the centre and with the theoretical opacity coefficient $k = k_1 \rho T^{-7/2}$, where ρ is the density and T the temperature at distance r from the centre. He assumes the model must possess a nucleus and deduces its properties. If L_r is the net flux of radiation across a sphere of radius r , and M_r the mass inside the sphere, then the conditions to be satisfied are $L_r = L$, the boundary value,

and $\int_{r=0}^{r=R} dM_r = M$, the given total mass, where R is the radius of the star. The solution

depends on the five parameters M, L, R, k_1 and μ , the molecular weight. Possible solutions exist only for sufficiently high values of k_1 . The outer part of the star is first treated by integrating inwards using the equation of state of a perfect gas and taking $M_r = M$. The numerical integration of the equations is then carried out for $\log k_1 = 26.2; 27.0; 27.4; 27.8$, still assuming perfect gas conditions, and the asymptotic behaviour of the solutions as $r \rightarrow 0$ is discussed. There exists a critical value $k_1 = k_1^0$ (≈ 27.05) such that if $k_1 < k_1^0$ then $M_r = 0$ at some value of $r > 0$ so that the solutions are of "collapsed" type; if $k_1 = k_1^0$ then $\rho \rightarrow 0$ as $r \rightarrow 0$; if $k_1 > k_1^0$ then $\rho \rightarrow \infty$ and $T \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow 0$, giving solutions of "centrally condensed" type. The author formulates an empirical rule which makes it possible to find, when the numerical integration has been carried sufficiently far, to which of these three types a given solution belongs. He shows that for $k_1 > k_1^0$ we must have $M_r \rightarrow 0$ as $r \rightarrow 0$. He then considers the setting-in of degeneracy at a certain level $r = r_1$, and shows that for small light-pressure the density distribution in the degenerate part will be independent of the source distribution. So this part is a polytrope of index $n = \frac{3}{2}$ as in the standard model. He deduces from theorems due to R. H. Fowler, and his own numerical values, that a centrally condensed envelope implies a centrally condensed " $n = \frac{3}{2}$ " polytrope running in from $r = r_1$. This is the same result as for the standard model. It follows that there must exist a nucleus with $\rho = \rho_{\max}$, the maximum density of which the matter is capable.

Finally the connection between the condition $\int_{r=0}^{r=R} dM_r = M$ and the mass-luminosity relation is discussed for this model. W. H. McCrea (Edinburgh).

Eddington, Arthur S.: A theorem concerning incomplete polytropes. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* 91, 440–444 (1931).

Nach Emden ist die negative potentielle Energie einer Massenverteilung der Masse M in einer Kugel vom Radius R , angeordnet als Polytrope vom Index n ,

$\Omega = \frac{3}{5-n} \cdot \frac{g M^2}{R}$. Eddington dehnt diese Formel für den Fall einer Verteilung mit räumlich veränderlichem n aus und findet, daß für eine solche $\Omega = \frac{3}{5-n_0} \cdot \frac{g M^2}{R}$ ist, wo

n_0 ein gewisser Mittelwert von n ist, der jedenfalls zwischen dem kleinsten n_1 und dem größten Wert n_2 der Verteilung liegt. Diese Beziehung zeigt, daß die potentielle Energie dieser „unvollkommenen“ Polytrope zwischen den Werten der potentiellen Energie liegt, die den „vollkommenen“ Polytropen vom Index n_1 bzw. n_2 entsprechen. Hieraus ergibt sich die wichtige Schlußfolgerung: Die Verteilung mit dem veränderlichen Index n besitzt eine geringere zentrale Dichte als diejenige mit dem Index n_2 . Nun deuten alle Untersuchungen darauf hin, daß der Polytropenindex bei einem Stern von außen nach innen abnimmt. Seine zentrale Dichte muß demnach geringer sein als diejenige, die man unter Zugrundelegung eines konstanten, der äußeren Atmosphäre entsprechenden Polytropenindex berechnet. Dieses Resultat steht in Widerspruch zu dem Sternmodell Milnes, dessen Voraussetzung eine starke zentrale Verdichtung ist.

H. Brück (Potsdam).

Chandrasekhar, S.: The highly collapsed configurations of a stellar mass. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 456–466 (1931).

The author examines the result of introducing the equation of state $p = K_2 \varrho^{\frac{3}{2}}$ into the treatment of Milne's „collapsed“ configurations. This equation holds for a degenerate electron gas if the relativistic effect is predominant. The work is confined to the case of constant opacity and source-strength. It is shown to be described by Emden's polytropic equation with index $n = 3$; while in the non-relativistic degenerate case ($p = K_1 \varrho^{\frac{5}{3}}$) the index is $n = \frac{3}{2}$. The author then derives the equations of fit to be satisfied at an interface $r = r'$ at which the index changes from $n = 3$, for $r < r'$, to $n = \frac{3}{2}$, for $r > r'$. He further considers what must happen if at any level $r = r''$ the equation $p = K_2 \varrho^{\frac{3}{2}}$ breaks down, supposing that this occurs when the matter has reached ϱ_{\max} the maximum density of which it is capable, so that inside $r = r''$ it is homogeneous. He obtains the solutions for given small luminosity L for different values of the mass M of the star, and shows that they can be put in the following linear sequence, where \odot in the mass of the sun and β is such that the ratio of radiation pressure to gas pressure is $(1 - \beta)/\beta$. In these cases of small L we have $\beta \approx 1$. I. $M < M_{\frac{3}{2}} = 0,61 \odot \beta^{-\frac{1}{2}}$ Emden polytropes with $n = \frac{3}{2}$. $M = M_{\frac{3}{2}}$ Emden polytrope with $n = \frac{3}{2}$ and central density $(K_2/K_1)^3$. II. $M_{\frac{3}{2}} < M < M_3 = 0,92 \odot \beta^{-\frac{1}{2}}$ Degenerate envelope surrounding homogeneous core. $M = M_3$ approximately an Emden polytrope with $n = 3$ and central density $= \varrho_{\max}$. III. $M > M_3$ Relativistic envelope surrounding homogeneous core. $M \rightarrow \infty$ Completely homogeneous with $\varrho = \varrho_{\max}$. He finally makes a tentative comparison of actual white dwarf stars with these theoretical classes.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Strömgren, B.: The possible solutions of the „equations of fit“ on the standard model. (Univ.-Observ., Copenhagen.) Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 466–472 (1931).

Bei der Integration seiner für das Problem des Sternaufbaus charakteristischen Differentialgleichungen geht Milne von den äußeren Teilen des Sternes aus, um von diesen nach innen fortzuschreiten. Im Falle des „Standardmodells“ werden κ und ε als konstant angesehen. Die Dichteverteilung sei für die äußeren Teile des Sterns durch eine Emdensche Polytrope vom Index $n = 3$ gegeben. Für einen ganz bestimmten Wert des Radius r erreicht $\varrho T^{-3/2}$ einen Wert, bei dem die Materie anfängt zu entarten. Innerhalb der durch diesen Wert des Radius bestimmten Kugel entspricht die Dichteverteilung einer Emdenschen Polytrope vom Index $n = \frac{3}{2}$, die sich an die $n = 3$ -Polytrope anschließt. Diese ist in bestimmter Form gegeben bei gegebenem Wert des Gesamtradius des Sterns unter Beachtung einer Diskriminante, die die Werte von M , L und x enthält. Der Anschluß der Polytrope vom Index $n = \frac{3}{2}$, die für die inneren Gebiete des Sternes gilt, an die eben definierte Verteilung muß in der Weise geschehen, daß jede von beiden Verteilungen an der Grenzfläche dieselbe bestimmte

Dichte und Temperatur ergibt und daß weiter die Gesamtmasse durch die Summe der in der inneren Kugel bzw. in der äußeren Kugelschale enthaltenen Massen dargestellt wird. Dem Verf. gelingt es, unter Benutzung gewisser von R. H. Fowler über Polytrope aufgestellter Sätze in der Lösung der für diesen Anschluß charakteristischen Gleichungen einen wesentlichen Schritt vorwärts zu kommen. Er kann unter anderem zeigen, daß die sich an die Polytrope vom Index $n = 3$ anschließende Polytrope vom Index $n = \frac{3}{2}$ den Typ besitzt, den Milne als „zentral verdichtet“ bezeichnet, wenn die $n = 3$ -Polytrope demselben angehört. *H. Brück (Potsdam).*

Cowling, T. G.: Note on the fitting of polytropic models in the theory of stellar structure. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 472—478 (1931).

Der Verf. zeigt, daß die „Anschlußgleichungen“ Milnes (siehe das vorangehende Referat) bei einem Sternmodell, bestehend aus einer Hülle vollkommenen Gases und einem Kern entarteter Materie, in den folgenden beiden Fällen Lösungen besitzen. Zeigt die äußere Hülle den „collapsed-type“ Milnes, so muß der innere Kern einem Emden-Modell entarteten Gases entsprechen. Gehört die äußere Hülle aber dem zweiten möglichen Typ, dem mit zentraler Verdichtung an, so muß dasselbe auch für den entarteten Kern gelten. Dies letzte Resultat ist dasselbe, das auch Strömgren auf anderem Wege gefunden hat. *H. Brück (Potsdam).*

Milne, E. A.: Note on „equations of fit“ in the theory of stellar structure. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 479—482 (1931).

Nach den Resultaten von Cowling und Strömgren schließt sich an eine für die äußeren Schichten eines Sternes — unter Voraussetzung des „Standardmodells“: $\kappa = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ — charakteristische Polytrope vom Index $n = 3$ an dem Punkt, wo die Entartung des Gases beginnt, eine Polytrope vom Index $n = \frac{3}{2}$ an, die, das ist das Wesentliche, den Typ mit einer zentralen Verdichtung zeigt, wenn die erste jenem Typ angehört. Nahe dem Zentrum des Sternes hat diese Lösung eine Singularität; die Dichte wird unendlich groß. Für diese innersten Schichten gilt eine neue Zustandsgleichung, für die der Verf. für eine allgemeine Betrachtung die Zustandsgleichung inkompressibler Materie $\rho = \rho_{\text{max}}$ ansetzt. Beim Übergang von der entarteten Gasschicht zu dieser innersten inkompressiblen Schicht erfährt die Dichte eine unstetige Änderung. Um das Gleichgewicht entlang der Trennungsfläche zu gewährleisten, muß neben den übrigen Bedingungen an dieser noch eine besondere thermodynamische Bedingung erfüllt werden, was in der Tat möglich ist. Bei einer genaueren Untersuchung ergibt sich, daß auf die Polytrope vom Index $n = \frac{3}{2}$ als neue Zustandsgleichung zunächst die Gleichung $p = K_2 \rho^{4/3}$ folgt entsprechend einem Polytropenindex $n = 3$. Auch sie gehört unter Voraussetzung des Standardmodells dem Typ mit zentraler Verdichtung an, falls dasselbe von der $n = \frac{3}{2}$ - bzw. $n = 3$ -Polytrope gilt. Innerhalb der jener Polytrope entsprechenden Schicht können weitere Änderungen der Zustandsgleichung erfolgen, bis im Innersten die Zustandsgleichung inkompressibler Materie gilt. Die Resultate von Cowling und Strömgren verlieren ihre absolute Gültigkeit, wenn das betrachtete Sternmodell nicht mehr das Standardmodell ist. Zum Schluß erwähnt der Verf. ein Modell, das aus einem entarteten Kern besteht, für den $\varepsilon = \text{const}$, $\kappa_2 = \text{const}$, umgeben von einer Gashülle, für die $\varepsilon = 0$, $\kappa_1 = \text{const}$, wobei $\kappa_1 \neq \kappa_2$, gelten soll. Die Resultate weichen nur unwesentlich von denen ab, die sich für das Standardmodell ergeben. *H. Brück (Potsdam).*

Thomas, L. H.: The slow contraction or expansion of a fluid sphere. II. Stability. Monthly Not. roy. astron. Soc. **91**, 619—628 (1931).

Continuing a previous investigation [M. N. **91**, 122 (1930)] the author considers the stability of slow radial motion of a fluid sphere with heat conduction and internal energy generation. The equations of motion are

$$\ddot{r} = 4\pi r^2 \frac{d}{dm} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \gamma \frac{m}{r^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} \dot{s} = 16\pi^2 \frac{d}{dm} \left\{ \frac{cr^4}{3\kappa} \frac{d}{dm} a \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^4 \right\} + g \quad (2)$$

$$\sigma = 4\pi r^2 \frac{dr}{dm} \quad (3)$$

where $0 \leq m \leq M$; $r = 0$ when $m = 0$; $\partial V / \partial \sigma = 0$ when $m = M$; r is the radius of the sphere enclosing mass m so that $r = r(m)$; σ is the volume, s the entropy, $V(s, \sigma)$ the internal energy, g (with certain assumptions about its derivatives) the rate of generation of energy, per unit mass of matter; κ is the opacity; γ, c, a , are physical constants. The problem is to find the stability conditions for slow change near an equilibrium solution of (1), (2), (3). These are: (I) the condition of dynamical stability, (II) the condition of thermodynamical stability, (III) a third condition, discussed in the previous paper, on small variations from the expected slow change when (I), (II) are satisfied. The author first treats the analogous problem in one degree of freedom instead of the continuous set represented by $r(m)$. Proceeding to this general case, (I) requires the condition that

$$\int_0^M \left\{ -\gamma \frac{m}{r} + V(\sigma) \right\} dm, \quad \text{where} \quad \sigma = 4\pi r^2 \frac{dr}{dm}$$

should be a minimum, (II) requires the discussion of the integral

$$\int_0^M \left\{ \frac{1}{2} (\delta\sigma)^2 \frac{\partial^3 V}{\partial s \partial \sigma^2} \dot{s} + \delta\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \sigma} \delta\dot{s} \right\} dm$$

where \dot{s} is given by (2) and δ represents small variations. A sufficient set of stability conditions of this class are obtained. (III) is shown to reduce to a condition on the solution of an integro-differential equation. *W. H. McCrea (Edinburgh).*

Hopf, Eberhard: On Emden's differential equation. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **91**, 653—663 (1931).

Die von R. H. Fowler vor einigen Monaten (s. dies. Zbl. **1**, 41f.) mathematisch sichergestellten Ergebnisse werden unter teilweiser Abänderung des Fowlerschen Beweisganges noch einmal, aber kürzer hergeleitet. *Wintner (Baltimore).*

Groot, H.: Die Energieentwicklung im Innern der Sterne. *Physica (Eindhoven)* **11**, 97—102 (1931) [Holländisch].

The theory of Milne on the origin of stellar energy is contrasted with those of Eddington-Russell and Jeans. It is argued that the latter theories are both insufficient and unconvincing. The chief merits of the solution of Milne are: a) The energy-production automatically results from thermodynamical considerations of the process: matter \rightleftharpoons radiation which may be postulated to be consistent with the temperatures of the order of 10^{12} degrees in the interior of a star, as demanded by the theory of Milne. b) The energy-production does not endanger the stability of the star since there is no critical temperature which acts like a springrelease as in the theory of Eddington-Russell. c) The energy-production is not likely to be inhibited by increasing ionisation, so as to render necessary the hypothesis of energy-production chiefly in the outer layers of a star, which in the theory of Jeans is compulsory. d) No hypothesis of super-radio-active elements with atomic weights substantially higher than those of the known terrestrial elements is called for. The only difficulty, apart from questions concerning the validity of Milne's star-model, seems to be the uncertainty whether the process: matter \rightleftharpoons radiation is really occurring in nature according to the laws of thermodynamics. *Autoreferat.*

Pannekoek, A.: The theoretical contours of absorption lines. II. *Monthly Not. roy. astron. Soc.* **91**, 519—531 (1931).

The author distinguishes three extreme cases of atoms giving rise to absorption lines in stellar spectra: (A) The concentration increases like P , the electron pressure,

as happens for the neutral atoms of a highly ionised gas. (B) The concentration is constant as in the case of neutral atoms with low ionisation and for resonance lines of ionised atoms at their maximum. (C) The concentration decreases like $1/P$ as happens for the ionised atoms when the degree of ionisation is small. In a previous paper he has dealt with (B). He here proceeds to deal with (A) and (C) by similar methods, giving formulae appropriate to the wings and central parts of the absorption lines. Applying (A) to the sodium D lines in the sun he deduces a fractional abundance of sodium of 0,076 per cent by mass. The line contours for medium residual intensity become steeper in passing from (A) to (B) and then to (C). The results can be used to study the change in intensity of a given line over the series of spectral classes, for which the change in p' , the ratio of total pressure to electron pressure, is the important factor. It appears that low temperature acts like low surface gravity g in increasing the intensity of lines. The author first computes the relative numbers of electrons for the temperature range 2000° to 13000° for the sun with $\log g = 4,4$ and for a giant star with $\log g = 2,4$. He takes a model atmosphere with a small percentage of atoms of low ionisation potential (metals) in the presence of an excess of hydrogen. His table shows that the decrease in p' slows down till about 5000° or 6000° is reached when the ionisation of the hydrogen begins to show itself in a further decrease in p' , which finally approaches the limiting value 2. The behaviour of the H, K lines of ionised calcium Ca^+ for these stars is then calculated using case (C) for ascending intensity, (B) for the neighbourhood of the maximum, and (A) for decreasing intensity. The resulting table shows maxima at 5300° for $\log g = 4,4$ and at 4400° for $\log g = 2,4$, which the author regards as confirmation of his values for p' . Finally the Balmer lines of hydrogen are considered and the maximum intensity is found to lie at 10500° and 9500° respectively for these values of $\log g$.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Jeans, James: The annihilation of matter. *Nature* (Lond.) 1931 II, 103—110.

Geophysik.

Ackerl, F.: Das Geoid. I. Vorbereitende Untersuchungen. *Gerlands Beitr. Geophys.* 29, 273—335 (1931).

Im Laufe der letzten Jahre hat Hopfner in zahlreichen Arbeiten ein „hypothesenfreies Verfahren zur Bestimmung der Geoide“ entwickelt. Zu dessen praktischer Durchführung ist notwendig eine über die ganze Erdoberfläche sich erstreckende Kenntnis von Schwerewerten, die nach „potentialtheoretisch einwandfreien Grundsätzen auf die Niveaufläche in Meereshöhe reduziert“ sind. Ein in diesem Sinne geeignetes Reduktionsverfahren ist das von A. Prey angegebene: Rechnerische Entfernung aller Massenwirkungen im Außenraum des Geoides (erste topographische Reduktion t' und erste Bougersche Reduktion b'), Verlegung des Beobachtungspunktes längs einer Kraftlinie auf das Geoid (Freiluftreduktion Δ) und Wiederhinzufügen der anfangs entfernt gedachten Massen (zweite topographische Reduktion t und zweite Bougersche Reduktion b). Es ergibt sich wegen $b' = b$ und $t' \neq t$ der reduzierte Schwerewert g zu $g = g' - 2b + \Delta + (t' \mp t)$, wo g' den im Beobachtungsort gemessenen Schwerewert bezeichnet und das Minuszeichen in der Klammer zu nehmen ist, wenn einzelne Teile der Erdoberfläche in der Nachbarstelle des Beobachtungsortes sich über diesen erheben, während das Pluszeichen für Beobachtungsorte auf ausgesprochenen Berggipfeln gilt. In den zurzeit vorliegenden Veröffentlichungen über Schweremessungen ist der Wert von t , dessen Kenntnis für das exakte Preysche Reduktionsverfahren erforderlich ist, nicht angegeben. Es wird daher der Klammerausdruck vernachlässigt, also mit einer genäherten Preyschen Reduktion gearbeitet, und jedem Ergebnis wegen dieser Vernachlässigungen ein Fehlbetrag von 50% zugebilligt. Mit den so auf die Niveaufläche in Meereshöhen reduzierten g -Werten von 4341 Beobachtungsorten werden Karten gleicher Schwere gezeichnet, und zwar 61 Spezialkarten, von

denen 6 in der Veröffentlichung wiedergegeben sind, und eine ebenfalls wiedergegebene Weltkarte. Die Differenz $g - \gamma'$ (Schwere in einem Geoidpunkt minus Schwere im zugeordneten Punkte des als Beobachtungsfläche dienenden „scheinbaren Niveausphäroides“) gibt scheinbare Schwerestörungen; sie werden in einer Welt- und in 3 Spezialkarten dargestellt. Aus den scheinbaren Schwerestörungen erhält man eine vorläufige Abschätzung der Geoidundulationen; ihre Größenordnung beträgt ± 100 m, ihr Maximum ist ± 1000 m. Schlomka (Halle a. S.).

Lambert, Walter D.: Note on Prey's article „Zur Frage nach dem isostatischen Massenausgleich in der Erdrinde“. Gerlands Beitr. Geophys. **30**, 239–240 (1931).

Der Verf. erklärt seine volle Übereinstimmung mit den Schlüssen, die Prey aus seinen Berechnungen über den isostatischen Zustand der Erdkruste gezogen hat, und führt aus, warum seine Zahlenwerte etwas von den Preyschen Werten abweichen. (Prey, vgl. dies. Zbl. **1**, 379.) K. Jung (Potsdam).

Boaga, G.: Osservazioni sul metodo del Borraß per la determinazione della precisione delle misure di gravità. (Istit. di Geodesia, Univ., Padova.) Boll. Comitato. naz. ital. per la Geodesia e Geofis., II. s. **1**, 101–106 (1931).

Bartels, J.: Use of magnetic data for investigating radiation from the sun. (12. ann. meet., Amer. Geophys. Union.) Trans. Amer. Geophys. Union **126**–131 (1931).

Die beobachteten Variationen des Erdmagnetismus auf der ganzen Erde während eines 24stündigen Zeitabschnittes lassen sich darstellen durch einen Punkt in einem Raum von $6JK$ -Dimensionen, wenn K die Anzahl der Observatorien und die Periode der kürzesten betrachteten Sinuswelle gleich $(24/J)$ Stunden ist, und wenn die harmonischen Konstanten (Koeffizienten der Fourier-Reihe) als rechtwinklige Koordinaten angesehen werden. Eine Anzahl von Tagen ergibt ebenso viele Punkte in dieser „verallgemeinerten Periodenuhr“. Die Verteilung dieser Punkte läßt sich mit denselben Formeln ausdrücken, die K. Pearson für das Korrelations-Ellipsoid abgeleitet hat. Die größte Achse des Ellipsoides ist zugleich diejenige Gerade, für die die Quadratsumme der Punktabstände am kleinsten ist. Sie entspricht dem weltweiten Anteil in den Veränderungen des Systems der tagesperiodischen Variationen von Tag zu Tag; dieser Anteil wird vermutlich Schlüsse auf Schwankungen in der ionisierenden Sonnenstrahlung gestatten, die, wegen der Absorption dieser Strahlung in den höchsten Atmosphärenschichten, nur auf diesem indirekten Wege beobachtbar sind. Zwei vorläufige Beispiele (Sitka, 24stündige Welle an ruhigen Tagen, Horizontalintensität) zeigen deutlich elliptische Verteilungen der Punkte. Autoreferat.

Hess, V. F.: Über neue Arbeiten auf dem Gebiete der kosmischen Ultrastrahlung. Elektrotechn. Z. **1931 II**, 936–937.

Rossi, Bruno: Über den Ursprung der durchdringenden Corpuscularstrahlung der Atmosphäre. (Physikal.-Techn. Reichsanst., Charlottenburg.) Z. Physik **68**, 64–84 (1931).

Die Arbeit von Rossi bestätigt die Angaben über die Existenz der von Bothe und Kohlhörster beobachteten Corpuscularstrahlen (Ultrastrahlen). Außerdem ist wahrscheinlich noch eine durchdringende γ -Strahlung vorhanden. In geringer Meereshöhe löst diese sekundäre Corpuscularstrahlung aus. Es ergibt sich, daß die ganze Corpuscularstrahlung ihren Ursprung in dieser γ -Strahlung der Erdatmosphäre hat oder die Ultrastrahlung besteht schon beim Eintritt in die Erdatmosphäre aus γ - und Corpuscularstrahlung. Schultze (Gießen).

Regener, E.: Über die Herkunft der Ultrastrahlung (Hessschen Strahlung). (Phys. Inst., Techn. Hochsch., Stuttgart.) Naturwiss. **1931 I**, 460–461.

Wenn man die Annahme eines endlichen, geschlossenen Weltraumes sich zu eigen macht, so wäre es möglich, daß das Licht eines Fixsternes nicht nur direkt, sondern auch auf dem Umwege der „anderen Seite der Weltraumkugel“ zu uns gelangt. Man hat bisher stets angenommen, daß die Zeit zum Durchlaufen dieses zweiten Weges groß gegenüber der Entwicklungsperiode eines Sternes ist. Verf. bringt nun die Hypo-

these zur Diskussion, daß das, was wir Ultrastrahlung nennen, eine Strahlung sei, die unter den gegenwärtigen Bedingungen im Weltraum gar nicht mehr entstehe, sondern zu einer Zeit, die um die Zeit eines Umlaufes der Strahlung früher, also in einer uns unbekannten älteren Weltperiode emittiert worden sei. Die uns bekannten Eigenschaften der Strahlung stehen durchaus nicht im Widerspruch mit dieser Hypothese des „Strahlenumwegs“. (Die kürzlich nachgewiesene solare Komponente der Ultrastrahlung, deren Vorhandensein wohl sehr für „direkte“ Strahlung spricht, wird vom Verf. nicht diskutiert.)

V. F. Hess (Graz).

Gray, L. H.: The nature and origin of ultra-penetrating rays. *Nature* (Lond.) 1931 I, 859—861.

Der Verf. berichtet über den Eröffnungsvortrag Prof. Geigers in der Royal Society in London über die Natur und den Ursprung der Ultrastrahlung und die daran sich anschließende Diskussion. Der von Regener bei seinen Absorptionsversuchen im Bodensee für die härteste Ultrastrahlung gefundene Schwächungskoeffizient von $2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ deutet darauf hin, daß diese härteste Komponente der Ultrastrahlung eine Energie entsprechend $3,7 \cdot 10^9 \text{ e-Volt}$ besitzt. Quanten von derartiger Größe könnten bei einer gleichzeitigen Vernichtung je zweier Protonen und zweier Elektronen entstehen. Wenn je ein Heliumatom mit vier Elektronen verschwindet, so würden je zwei derartige Energiequanten emittiert werden. Solche Massenvernichtungsprozesse könnten sehr wohl in den Sternen vorkommen. Natürlich würden nur die aus den oberflächennahen Schichten der Sterne stammenden Quanten uns wirklich erreichen. Auch die Auffindung der solaren Komponente der Ultrastrahlung wurde diskutiert. In der Diskussion wurde mehr der Standpunkt vertreten, daß die Ultrastrahlung aus dem massenarmen Interstellarraum stamme. Auch Regeners neueste Idee (s. d. vorangehende Referat) wurde besprochen. Rutherford hat, von der oben erwähnten Hypothese ausgehend, daß Helium im Weltraum spontan verschwinde, den Versuch gemacht, eine Hochdruckionisationskammer mit über 100 at gefüllten Heliumzylindern zu umgeben, konnte jedoch keine Erhöhung der Ionisation konstatieren. Ferner wurde die Rolle der Atomkerne bei der Absorption der Ultrastrahlung, die Wilsonsche Hypothese der Erzeugung hochgeschwinder Elektronen in Gewitterfeldern und die Experimente mit den Elektronenzählrohren besprochen. Die neuesten Versuche dieser Art (mit mehreren Zählern übereinander) in starken Magnetfeldern (von Rossi und Mott-Smith) haben keine Ablenkung der Ultrastrahlen erkennen lassen, was auch der von Geiger jüngst geäußerten Ansicht, daß es sich um sehr schnelle Protonen handelt, widerspricht.

V. F. Hess (Graz).

Scholz, Joachim: Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität Nr. 73. Theoretische Untersuchungen über die Feld- und Ionenverteilung in einem stromdurchflossenen Gas, das auch schwer bewegliche Elektrizitätsträger enthält. (*Phys. Inst., Univ. Graz.*) Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien, Math.-naturwiss. Kl. IIa 140, 49—66 (1931).

Über einer horizontalen unendlichen leitenden Ebene wird ruhende Luft normaler Dichte dauernd ionisiert. N sei die Anzahl der Kerne pro Kubikzentimeter, davon ein Teil positiv bzw. negativ geladen, der Rest ungeladen. Die anfängliche Raumladung in der Luft sei Null, die Ladung der Platte werde dauernd aufrechterhalten. Infolge des Feldes fließt ein Strom von der Ebene nach aufwärts (pos. Ionen nach oben, negative nach unten). Da von der Platte keine positiven Ionen an die Luft abgegeben werden, tritt in der Nähe der Platte eine Verarmung an positiven und eine Anreicherung an negativen Ionen ein, die das Auftreten einer negativen Raumladung und damit eine Abnahme des Feldes nach oben zu (pos. x -Richtung) bewirken. Es werden unter vereinfachenden Annahmen die Differentialgleichungen des stationären Zustandes annähernd gelöst. Es ergibt sich für die Feldstärke E in der Höhe x der angenäherte

Ausdruck $\frac{E_x - E_\infty}{E_\infty} = 0,59 e^{-\frac{x}{l}}$, wo $l = \frac{2\sqrt{2} k E_\infty}{\eta_1 N}$, k die Beweglichkeit der kleinen

Ionen, η_1 die Vereinigungskonstante der kleinen Ionen mit den geladenen Kernen bedeuten. Dieser Ausdruck $\frac{E_z - E_\infty}{E_\infty}$ ist unter der annähernd zutreffenden Voraussetzung

abgeleitet, daß $a = \frac{\eta_1}{4\pi\epsilon k} = 4,00$ ist (ϵ = Elementarquantum). Allgemeiner ist

$E_0 = a^{a-1} E_\infty$. Bezeichnet man die Schicht über der Platte, in der das Feld um mehr als 10% größer ist als in großer Entfernung von ihr, als „gestörte Schicht“, so ergibt sich für ihre Höhe $x_{10} = 100 \frac{E'_\infty}{N}$ Meter. Bei normalen luftelektrischen Verhältnissen ist x_{10} von der Größenordnung 1 Meter. Die Formel für x_{10} gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Zahl der Kerne groß ist gegenüber der Zahl der kleinen Ionen. Für kernfreie Luft ist $x_{10} \cong 5$ Meter.

L. Tuwim (Berlin).

Schubert, O. v.: Ein neuer Beweis für die Erscheinung der Symmetrie. Meteor. Z. 48, 89–92 (1931).

Verf. schlägt als Kriterium, das in kurzer Zeit die Echtheit oder wenigstens die relative Güte eines angenommenen Symmetriepunktes gegenüber anderen Punkten einer Luftdruckkurve oder dergleichen zu bestimmen gestattet, vor, den Gesamtinhalt der Fläche zu ermitteln, die zwischen den Kurventeilen liegt, wenn man die eine Hälfte der Kurve um die Ordinate des angenommenen Symmetriepunktes umklappt. Mit Hilfe dieses Verfahrens wird die Frage untersucht, ob bei Luftdruckkurven die Spiegelung (durch Umklappung) größere Ähnlichkeit zwischen 2 Kurventeilen ergibt, als die Verschiebung eines Kurventeiles (um die Länge einer dominierenden Periode) über den anderen. Die Frage wird dahin beantwortet, daß die Spiegelung größere Ähnlichkeit ergibt. Verf. sieht darin einen Beweis für die Existenz von Symmetriepunkten.

F. Baur (Frankfurt a. M.).

Škreb, S.: Ein Kriterium des Weickmannschen Symmetriepunktes. (Geophys. Inst., Univ. Zagreb.) Meteor. Z. 48, 106 (1931).

Verf. empfiehlt als Kriterium für die Existenz von Symmetriepunkten die Bestimmung der Häufigkeitskurve der Differenzen der (zum angenommenen Symmetriepunkt) symmetrisch liegenden Ordinaten. Diese Kurve muß um 0 herum ein ausgesprochenes Maximum zeigen, wenn von einer Symmetrie gesprochen werden können soll.

F. Baur (Frankfurt a. M.).

Colborne, D. C.: The diurnal tide in an ocean bounded by two meridians. Proc. roy. Soc. Lond. A 131, 38–52 (1931).

Nach der Methode von Goldsbrough werden mittels der hydrodynamischen Gleichungen die eintägigen Gezeiten in einem Ozean, 12700 Fuß tief (mittlere Tiefe des Atlantischen Ozeans) und durch 2 Meridiane in 60° Abstand von Pol zu Pol begrenzt, untersucht. Es wird mit Hilfe von Kugelfunktionen und Zugeordneten ein Ausdruck erhalten, der mit einer Genauigkeit von etwa 7% die Höhe der gezeitlichen Erhebung für jeden Zeitmoment in jedem Punkt des Ozeans annähernd angibt. Es ergibt sich Symmetrie in bezug auf den zentralen Meridian $\Phi = 30^\circ$. Die durch die erhaltene Lösung dargestellte Welle zeichnet sich durch manche Eigentümlichkeiten aus. So ist die Phasendifferenz zweier beliebiger Punkte der nördlichen Hälfte des Ozeans niemals größer als 50° und in den meisten Fällen erheblich kleiner. Dasselbe gilt natürlich auch für die südliche Hälfte. Die Phasendifferenz zweier in bezug auf den Äquator symmetrischer Punkte beträgt 180°. Es wird gezeigt, daß die erhaltene Welle äquivalent ist einer Kombination aus einer stehenden Welle und einer fortschreitenden von viel kleinerer Amplitude. Bei einer solchen Kombination kann der Phasenbereich nur beschränkt sein. Ferner ergeben sich 2 gleiche Zeitperioden, die „Ruheperioden“, die sich dadurch auszeichnen, daß in keinem Punkte des Ozeans weder Flut noch Ebbe beobachtet werden kann. Während 2 anderer, kürzerer Perioden ist Ebbe in allen Punkten der nördlichen Ozeanhälfte, Flut in allen Punkten der südlichen bzw. umgekehrt. Die Flutstundenlinien bewegen sich, wenn vorhanden, von

einer Begrenzung zur anderen und werden um so mehr meridianförmig, je näher sie dem zentralen Meridian sind, welcher selbst eine Flutstundenlinie ist. Die Rechnungen ergeben in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, daß die Amplitude der eintägigen Gezeit viel kleiner als diejenige der halbtägigen ist. Es ergibt sich auch für geeignete Beobachtungsorte, nämlich die Ostküste der Vereinigten Staaten, eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Verhältnissen der Höhen der beiden Gezeiten. L. Tuwim (Berlin).

Ertel, H.: Die Krümmung der Diskontinuitätsflächen in der Atmosphäre und im Ozean. Veröff. preuß. meteor. Inst. Nr 380, 147—152 (1931).

Mit Hilfe der hydrodynamischen Gleichungen wird für die Krümmung $K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$ einer infolge eines stationären Temperatursprunges in der Vertikalen entstandenen Diskontinuitätsfläche in der Atmosphäre oder im Ozean (z. B. Grenze zwischen warmer und kalter Luft) folgender Ausdruck abgeleitet:

$$K = - \frac{\omega \sin \varphi}{g_z} \frac{\varrho' \operatorname{rot}_z(w') - \varrho \operatorname{rot}_z(w)}{\varrho' - \varrho}.$$

Hierin bedeuten: $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ — Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, φ die geographische Breite, z die Höhe des betrachteten Punktes der Diskontinuitätsfläche über Meeresniveau, g_z die Schwerebeschleunigung in der Höhe z ; ϱ' und ϱ die Dichten an beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche. w' und w die entsprechenden Geschwindigkeiten. Die Krümmung ist positiv bzw. negativ, wenn die Diskontinuitätsfläche von oben gesehen konvex bzw. konkav ist. Hyperbolische Flächenpunkte ($rr' < 0$) werden nicht betrachtet. L. Tuwim (Berlin).

Solberg, H.: Das Zyklonenproblem. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 121—131 (1931).

Aus den empirischen Untersuchungen der norwegischen Meteorologenschule scheint nach Verf. hervorzugehen, daß die großen Zyklonen der temperierten Zone auf eine Art Wellenstörung in der Polarfrontfläche zurückzuführen sind. Da der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zyklonen, d. h. die Wellenlänge L der Störung, von der Größenordnung 2000 km ist und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v rund 75 km/Stunde beträgt, so ergibt sich eine Schwingungsdauer T von etwa 27 Stunden. Verf. behandelt weiter mittels hydrodynamischer Gleichungen das Problem der Schwingungen zweier übereinander geschichteter verschieden temperierter Luftmassen, wobei er zur Vereinfachung annimmt, daß beide Luftmassen in der vertikalen Richtung unendlich ausgedehnt bzw. zwischen festen Ebenen parallel der Trennungsfläche eingeschlossen sind. Er erhält eine (nicht angeführte) „Frequenzgleichung“, welche eine Beziehung zwischen L , T , v , Ω (Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation), φ (geographische Breite), Θ , Θ' , V , V' (Θ und Θ' , V und V' bedeuten die absoluten Temperaturen bzw. Geschwindigkeiten der Luftteilchen in den beiden Luftmassen) darstellt. Für $L = 2000$ bzw. 2500 km, $V = -V' = -5 \text{ m/sec}$, $\Theta = 273^\circ$, $\Theta' = 283^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ ergibt die Frequenzgleichung als eine ihrer Lösungen $v = 24,8$ bzw. 29,2 m/sec = 90 bzw. 105 km/Stunde und $T = 22,4$ bzw. 23,6 Stunden in befriedigender Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Verf. untersucht die der angeführten Lösung entsprechenden Wellen mit Hilfe der zur Frequenzgleichung führenden Gleichungen und kommt zum Schluß, daß es sich um Trägheitswellen handelt, welche auf Coriolis- und Zentrifugalkraft beruhen. Die Umlaufsrichtung in der Projektion der Orbitalbahnen der Luftteilchen auf die Diskontinuitätsfläche errechnet sich als antizyklonisch in der oberen, zyklonisch in der unteren Schicht, also in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. L. Tuwim.

Devik, Olaf: Thermische und dynamische Bedingungen der Eisbildung in Wasserläufen auf norwegische Verhältnisse angewandt. (Phys. Inst., Techn. Hochschule, Nidaros.) Geofys. publ. norske Vidensk.-Akad., Oslo 9, 1—100 (1931).

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen des Verf. bildet der Strahlungshaushalt der Flüsse und ihrer Umgebung. Ein- und Ausstrahlung der Erdoberfläche, Reflexion

und Absorption des Wassers und der Eis- und Schneedecke werden so vollständig behandelt, als dies zur Zeit möglich ist. Zur Berechnung der Ausstrahlung der Wasserläufe wird eine bequeme Formel abgeleitet, die auch den Einfluß der Bewölkung zu berücksichtigen gestattet. Ein breiter Raum ist der Berechnung des durch Verdunstung und Austausch bewirkten Wärmeumsatzes gewidmet, und auch hierfür werden unter Berücksichtigung wärmetechnischer Untersuchungen Formeln aufgestellt, die eine quantitative Erfassung dieser Effekte ermöglichen. Ein Kapitel über periodische Wärmeströme durch die obere und untere Grenzfläche der Gewässer bildet in Verbindung mit Berichten über experimentelle Untersuchungen des Verf. über die Unterkühlung der Wasseroberfläche den Übergang zu den Kapiteln über die Eisbildung. Hierin wird zunächst die statische Eisbildung einer eingehenden physikalischen Analyse unterzogen. Der Eiszuwachs bei quasistationärem Wärmestrom, Berechnung der Eisdicke, Wärmeabgabe der Eisdecke, Temperaturgradient im Eise, Wärmetransport durch schneebedecktes Eis und Oberflächentemperatur einer Schneedecke bilden den Inhalt dieser Untersuchungen, die mit einer Betrachtung über das Wärmegleichgewicht bei statischer Eisbildung abschließen. Im letzten Kapitel über dynamische Eisbildung gelangen die Untersuchungen über Eisproduktion in offenen bzw. teilweise offenen Wasserläufen, Grundeisbildung und Eisgänge zur Darstellung. Der Verf. war überall bemüht, die physikalische Seite der Probleme möglichst scharf herauszuarbeiten und, wenn möglich, quantitativ zu stützen. Die beigegebenen Tabellen und instruktiven Diagramme dürften auch zur Beantwortung vieler praktischer Fragen von großem Nutzen sein.

H. Ertel (Berlin).

Köhler, Hilding: Über die Kondensation an verschiedenen großen Kondensationskernen und über die Bestimmung ihrer Anzahl. Gerlands Beitr. Geophys. 29, 168 bis 186 (1931).

Es wird (zunächst ohne Berücksichtigung der Koagulation) die Kondensation des Wasserdampfes an kleinen, aus lösbarem Salz bestehenden Kondensationskernen mit Hilfe der klassischen Thermodynamik untersucht. Auf Grund früherer Beobachtungen des Verf. am Haldde Observatorium wird weiter angenommen, daß die Massen der verschiedenen in der Atmosphäre schwebenden einzelnen Kondensationskerne gleich $1,8 \cdot 10^{-14} p^2$ g sind, wo p positive oder negative ganze Zahlen bedeuten ($4 \geq p \geq -16$). Dann erhält Verf., daß bei geringen Dampfspannungen die auf verschiedenen Kernen entstandenen Tröpfchen gleichzeitig wachsen müssen. Bei größeren Dampfspannungen aber tritt eine starke Kondensation an den schwersten Kernen ein. Dabei sinkt die Dampfspannung und die auf leichteren Kernen entstandenen Tröpfchen müssen teilweise verdunsten. Die durch Verdunstung verkleinerten Tropfen steigen leicht nach oben. Dadurch wird eine räumliche Trennung der den verschiedenen ganzen Zahlen p entsprechenden Tropfen entstehen. Auf diese Weise erklärt Verf. allerdings nur qualitativ einige meteorologische Erscheinungen, wie: 1. Wolkenetagen, 2. das Auftreten von Kernen in Nebeln, wenn die vertikale Luftbewegung nach Wolkenbildung aufhört. Es folgen einige Betrachtungen über den Einfluß der Koagulation: Qualitativ sollen die beschriebenen Vorgänge durch Koagulation nicht wesentlich geändert werden. Aus alledem schließt Verf., daß man mit nur einem Pumpenzug durch den Aitkenschen Kernzähler nur die Anzahl der schwersten Kondensationskerne erhält. Verf. schlägt vor, mehrere Pumpenzüge auszuführen und nicht nur die Anzahl der Kerne, sondern auch ihre Größe zu bestimmen. Aber auch dann können die Zählungen durch Koagulation gefälscht werden.

L. Tuwim (Berlin).

Lauscher, Friedrich: Ein Beitrag zur Anwendung des projizierten Trübungsfaktors. (Zentralanst. f. Meteor. u. Geodynamik, Wien.) Gerlands Beitr. Geophys. 30, 136 bis 141 (1931).

Der von Linke eingeführte Trübungsfaktor (T), der anschaulich gesprochen angibt, wieviele ideale, das Licht molekular zerstreuende Atmosphären zusammen die gleiche Lichtextinktion ergeben würden wie die jeweilig vorhandene trübe bzw. feuchte, gibt ein einigermaßen zutreffendes Bild für die zeitlichen Änderungen der atmosphärischen Durchlässigkeit für einen und denselben Beobachtungsort. Hingegen treten mehr oder weniger große Schwierigkeiten beim Vergleich zwischen den T verschiedener Stationen auf, da (worauf O. Hoelper schon in der Z. Geophysik 1 hinwies) jeder Ort durch eine ihm eigentümliche Einheit der Luftmasse (m) charakterisiert ist, auf welche die Trübung bezogen wird. Im Gegensatz zu so gedachtem T , der nur

ein gewisses Maß des „spezifischen“ atmosphärischen Trübungsgrades darstellt, definieren Feussner und Dubois [Gerlands Beitr. z. Geophysik **27** (1930)] einen ein gewisses Maß des „absoluten Trübungsgehalts“ darstellenden T ., indem sie den Extinktionskoeffizienten reiner Luft im Meeresniveau (760 mm) als ein von der Seehöhe unabhängiges Einheitsmaß wählen. Die über einem gewissen Höhenniveau lagernde Trübung denken sie sich über die ganze Atmosphäre, bis zum Meeresniveau hin, verteilt und setzen bei dem so gedachten „projizierten T .“ (T_p) den unverändert bleibenden Trübungsterm zum Extinktionskoeffizienten reiner Luft im Meeresniveau (bei gleicher Sonnenhöhe) in Beziehung. Verf. versucht nun, so gedachten T . dem Verständnis näherzubringen. Bezeichnet J_b die Intensität der Sonnenstrahlung im Niveau mit dem Luftdruck b , J_0 die Solarkonstante, $q_{l,b}^m$ den Transmissionskoeffizienten reiner Luft und Θ einen Faktor der Trübungswirkung, so ist $J_b = J_0 \cdot q_{l,b}^m \cdot \Theta$. Bei Verteilung der gleichen Trübung (Θ unverändert angenommen) über die Gesamtatmosphäre würde entsprechend die Intensität im Meeresniveau (J) — vom Verf. „projizierte Strahlungsintensität“ genannt — zu berechnen sein. Es ist $J = J_0 \cdot q_{l,760}^m \cdot \Theta$. Durch leichte Umformung erhält man $J = J_b \cdot \frac{J(\sec z, 760)}{J(\sec z, b)} = J_b \cdot \frac{J_{h,760}}{J_{h,b}}$, wo h die Sonnenhöhe und z die Zenitdistanz der Sonne ist. Es gilt die Gleichung

$$T_p = \frac{\log J_0 - \log J}{\log J_0 - \log J_{h,760}},$$

welche leicht in die von Feussner und Dubois für T_p angegebene Definitionsgleichung überzuführen ist. Verf. berechnete kürzlich [Meteor. Z. **48**, 212 (1931)] eine Tabelle der $J_{h,b}$ -Werte reiner Atmosphäre in Abhängigkeit von h und von b , die, wie er weiter ausführt, zur bequemen Berechnung von T_p dienen kann. Der Gang einer solchen Berechnung wird hier wiedergegeben, ebenso eine Tabelle, welche die J -Werte als Funktion von h und T_p zeigt.

Chr. Jensen (Hamburg).

Müller, Max: Der Einfluß der Anisotropie der Gesteinsmedien auf die Verteilung niederperiodischer elektromagnetischer Wechselfelder. (Reichsanst. f. Erdbebenforsch., Jena.) Gerlands Beitr. Geophys. **30**, 142—195 (1931).

Verf. behandelt den Einfluß der Anisotropie der Gesteinsmedien auf die Verteilung niederperiodischer elektromagnetischer Wechselfelder. Es wird nach einleitenden Betrachtungen das Strömungsfeld eines Dipols in Abhängigkeit von Frequenz, Leitfähigkeit und Schichtdicke theoretisch untersucht, die Bedingungen für das Verschwinden der quellenfreien Sekundärströmung aufgestellt, das Magnetfeld einer Doppelquelle unter Berücksichtigung der Abnahme der Stromdichte mit der Tiefe graphisch berechnet und der Einfluß der Anisotropie der Medien auf den Verlauf stationärer Ströme dargestellt. In Geländemessungen wurden diese Untersuchungen geprüft und gültig befunden. Die jeweils günstigste Stromfrequenz ergab sich als von der mittleren Leitfähigkeit und Mächtigkeit der Schichten abhängig. Im Anschluß an diese für direkte Stromzufuhr in den Boden gültigen Untersuchungen wird sodann eine Theorie der Methoden mit induktiver Stromübertragung gegeben. Der prinzipielle Vorteil der induktiven Stromzufuhr gegenüber der direkten besteht vor allem darin, daß das im Untergrund induzierte Strömungsfeld stärker frequenzabhängig ist als das eines elektrischen Dipols. Dadurch kann durch Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Feldverteilung die Vieldeutigkeit der Meßergebnisse erheblich eingeschränkt werden. Berechnet wird das Magnetfeld eines geschlossenen, von stationärem Strom durchflossenen Kabels und — in Anlehnung an Arbeiten Levi-Civitas und Pollaczeks — das Magnetfeld eines sehr langen wechselstromdurchflossenen geradlinigen Kabels, das an der Erdoberfläche parallel zu einer wenig tiefen ebenen leitenden Schicht verläuft. Die Frequenzabhängigkeit der Feldverteilung induzierter Ströme wird systematisch untersucht. Auch zur Prüfung der Theorie der induktiven Methoden wurden Geländemessungen ausgeführt, die ausführlich beschrieben sind. W. Stern (Köln).

Belluigi, A.: Über die Berechnung von deformierten elektromagnetischen Feldern in der geoelektrischen Prospektion. *Gerlands Beitr. Geophys.* **1**, Erg.-H., 363—372 (1931).

Verf. berechnet die Deformation des elektromagnetischen Feldes eines horizontal auf unendlichem Halbraume liegenden Stromdipoles durch einen Körper beliebiger Gestalt, der in seinen elektrischen Eigenschaften von denen des homogenen Untergrundes differenziert ist. Ein Bündel von Stromröhren wird derart berechnet, daß ihre quantitative Verteilung im unendlichen Halbraume bekannt ist und diejenige Stromstärke bestimmt, bei der je nach Gestalt, Lage und elektrischen Eigenschaften des Störungskörpers Felddeformationen eintreten können. Darauf wird die maximale Felddeformation berechnet und diejenige Stromstärke erhalten, die das anomale elektromagnetische Feld an der Erdoberfläche erzeugt. Zur Bestimmung dieses Feldes entwickelt Verf. ein neues graphisches Verfahren: Durch Einführung eines Polarkoordinatensystemes, in dem die Polare mit der x -Achse übereinstimmt und das in der Ebene des Querschnittes liegt $x = \varrho \cos \Theta$; $z = \varrho \sin \Theta$; $dx dz = \varrho d\Theta d\varrho$ werden die Komponenten des totalen magnetischen Feldes in (0)

$$\begin{cases} H = -2J \iint \sin \Theta d\Theta d\varrho \\ Z = -2J \iint \cos \Theta d\Theta d\varrho \end{cases}$$

Durch Zerlegung der Ebene um 0 durch ein System von n Kreisen und m Radien und Einsatz von

$$\begin{cases} H_{i,k} = -2J \int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} \sin \Theta d\Theta \int_{\varrho_k}^{\varrho_{k+1}} d\varrho \\ Z_{i,k} = -2J \int_{\Theta_i}^{\Theta_{i+1}} \cos \Theta d\Theta \int_{\varrho_k}^{\varrho_{k+1}} d\varrho \end{cases}$$

erhält man schließlich

$$\begin{cases} H = \sum_{i,k}^{n,m} H_{i,k} = \sum_{i,k}^{n,m} [2J (\cos \Theta_{i+1} - \cos \Theta_i) (\varrho_{k+1} - \varrho_k)] \\ Z = \sum_{i,k}^{n,m} Z_{i,k} = \sum_{i,k}^{n,m} [-2J (\sin \Theta_{i+1} - \sin \Theta_i) (\varrho_{k+1} - \varrho_k)] \end{cases}$$

Daraus ergibt sich als das beste System der Zerlegung ein solches, in dem in einem gewissen Maßstabe $H_{i,k} = 1$ und $Z_{i,k} = 1$ wird. W. Stern (Köln).

Kristallographie.

Reinicke, Richard: Atomare Wirkungsbereiche mit Tetraedersymmetrie als gemeinsames Bauelement der sämtlichen Kristallgitter. *Z. Kristallogr. usw.* **A 78**, 334 bis 362 (1931).

Aufbau des Diamanten aus tetraedrischen Wirkungsbereichen. Aufteilung der Umgebung eines Wirkungsbereiches in verschiedene Koordinationssphären. Auf letzteren beruhende (dem Ref. nicht ganz zwanglos erscheinende) Analogien zu vielen anderen Strukturen. F. Laves (Göttingen).

Laves, F.: Ebenenteilung und Koordinationszahl. (*Mineralog. Inst., Univ. Göttingen.*) *Z. Kristallogr. usw.* **A 78**, 208—241 (1931).

Verf. stellt sich die Frage nach allen möglichen lückenlosen Überdeckungen der Ebene durch Polygone (v = Ecke, v jeweils fest), wobei alle Polygone dieselbe Umgebung in folgendem Sinne haben sollen: Eine Ecke heiße n -zählig, wenn in ihr n Polygone (d. h. n Kanten) zusammenstoßen; für jedes Polygon soll jetzt die zyklisch geschriebene Reihe n_1, n_2, \dots, n_v der Zähligkeiten für seine v Ecken dieselbe oder die gespiegelte (d. h. von hinten nach vorn zu lesende) sein. Die Polygone sind also topologisch alle gleichumgeben. Die Ecken der Polygone sind willkürlich über die Ebene verstreut, wobei es in einem näher ausgeführten Sinne „innere Punkte“ in der

Anzahl P_i und „Randpunkte“ (P_r) gibt. Verschwindet P_r/P_i nicht, so gibt es beliebig viele Ebenenteilungen der gewünschten Art. Verschwindet P_r/P_i , so gibt es genau 11 verschiedene Ebenenteilungen, nämlich eine Überdeckung durch Sechsecke, je 3 durch Fünfecke und Vierecke, 4 durch Dreiecke. Dies Ergebnis wird mit rein arithmetischen Überlegungen und geometrisch-konstruktiven Mitteln gewonnen. Die duale Fragestellung ist die nach der Anzahl von Netzen, mit denen sich die Ebene überziehen läßt, so daß in jeder Ecke 1. gleich viele, nämlich v Kanten münden und 2. der Zykel der Zahlen n_1, n_2, \dots, n_v der in jede Ecke mündenden n_v -Ecke für jede Ecke (evtl. abgesehen vom Drehsinn) derselbe ist. Solcher Netze gibt es gleichfalls 11. Die gefundene Lösung eignet sich in natürlicher Weise zur Beschreibung der Koordinationsverhältnisse von ebenen Kristallen der Zusammensetzung $A_n B_m$. Es wird gezeigt, daß es außer den trivialen Koordinationen $\{1, k\}$ und $\{2, k\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) nur noch 5 weitere Fälle gibt. Heesch (Göttingen).

Shōji, Hikoroku: Geometrische Beziehungen unter den Strukturen der Modifikationen einer Substanz. Z. Kristallogr. usw. A 77, 381—410 (1931).

Es wird nach geometrischen Beziehungen zwischen den Kristallstrukturen mehrerer Modifikationen derselben chemischen Substanz gesucht, welche gestatten, den Modifikationswechsel verständlich zu machen. Es werden nur diejenigen polymorphen Umwandlungen betrachtet, für welche die Annahme gilt, daß alle Atome, die sich in den identischen Lagen in verschiedenen Elementarzellen befinden, sich bei der Umwandlung relativ zu ihren Elementarzellen in gleicher Weise verschieben, und diese Zellen in gleicher Weise deformiert werden. Die bei der Umwandlung eintretende Deformation des Kristallgebäudes wird in zwei Komponenten zerlegt gedacht: 1. Relative Verschiebungen zwischen den Massenebenen in einer oder mehr als einer Parallelmassenebenenserie parallel denselben Ebenen, die keine Volumenänderung, jedoch eine große Änderung der Atomanordnung im Gitter und eine Änderung der Gitterdimensionen in gewissen Richtungen hervorrufen können. 2. Ebenenabstandsänderung in derselben Massenebenenserie und Atomabstandsänderung in denselben Massenebenen, die von der Größenordnung der Volumenänderung bei der Umwandlung ist. Die erste Komponente wird die einfache gleitartige Deformation des Gitters längs einer Ebenenserie (der Umwandlungsebene) genannt. Es werden noch verschiedene Arten dieser einfachen gleitartigen Deformation unterschieden, bezüglich welcher auf das Original verwiesen sei. Es wird nunmehr die Hypothese gemacht, daß bei der Umwandlung einer Modifikation in eine andere die in beiden Modifikationen vorliegenden „Bereiche größter Kohäsion“ ihre Richtung nicht verändern (oder daß mindestens ein Bereich größter Kohäsion in der ersten Modifikation mit einem Bereich größter Kohäsion in der anderen Modifikation bezüglich der Richtung übereinstimmt). Diese Bereiche größter Kohäsion sind physikalisch im allgemeinen als Spalt- oder Gleitebenen kenntlich. Von dieser Hypothese geleitet, werden die Modifikationsänderungen verschiedener Stoffe untersucht und als Deformationen im oben dargelegten Sinne beschrieben.

Folgende Umwandlungen wurden behandelt: kubisch raumzentriert — kubisch flächenzentriert, kubisch flächenzentriert — hexagonal dichteste Kugelpackung, die beiden Zinnmodifikationen, Diamant-Graphit, NaCl-Typ — CsCl-Typ, Zinkblende-Wurtzit, Anatas-Rutil, Aragonit-Kalzit, die verschiedenen Karborundmodifikationen, Metacinnabarit-Zinnober, verschiedene SiO_2 -Modifikationen. Der Übergang kubisch flächenzentriert — kubisch raumzentriert soll beispielsweise erreicht werden „durch unendlich viele und unendlich kleine“, abwechselnd nach der $(\bar{1}11)$ -, $(1\bar{1}1)$ -, $(11\bar{1})$ - und (111) -Ebenenserie in der $[1\bar{1}2]$ -, $[\bar{1}12]$ -, $[112]$ - und $[1\bar{1}\bar{2}]$ -Richtung erfolgende Deformationen (Scherungen), wodurch Kontraktion in der $[001]$ -Richtung und Dilatationen in den $[110]$ - und $[\bar{1}10]$ -Richtungen erreicht werden sollen. Weitere Einzelheiten, insbesondere auch bezüglich der anderen Modifikationsänderungen sind der ausführlichen Originalabhandlung zu entnehmen.

Es sei noch erwähnt, daß aus den geometrischen Beziehungen Rückschlüsse auf die Umwandlungsgeschwindigkeiten gewonnen werden konnten. F. Laves (Göttingen).